CHAPITRE 10 — Partie 2 - Equations du 2nd ordre

EXO 13

(a) $y'' - 2y' + y = 0$ est une EDL homogène du 2nd ordre

$(E.C.)$: $r^2 - 2r + 1 = 0 \leadsto$ une racine double $r_0 = 1$

donc $\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sont les fonctions de la forme } f : t \mapsto (At+B)e^t \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$

(b) $y'' - 5y' + 6y = 0$ $\quad (EC)$: $r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r = 2$ ou $r = 3$

solutions $\boxed{f : t \mapsto Ae^{2t} + Be^{3t} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$

(c) $y'' - 3y' = 0$ $\quad (EC)$: $r^2 - 3r = r(r-3) = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = 3$

solutions $\boxed{f : t \mapsto A + Be^{3t} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$

(d) • (EH) $y'' - 4y' + 3y = 0$ $\quad (EC)$ $r^2 - 4r + 3 = 0 \Leftrightarrow r = 1$ ou $r = 3$

solutions $g : t \mapsto Ae^t + Be^{3t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = at^2 + bt + c$ Alors $y_0'(t) = 2at + b$ et $y_0''(t) = 2a$

Ainsi $y_0''(t) - 4y_0'(t) + 3y_0(t) = 3at^2 + 3bt + 3c - 8at - 4b + 2a = 3at^2 + (3b-8a)t + (3c - 4b + 2a)$

donc y_0 solution de $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3b - 8a = -2 \\ 3c - 4b + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ 3b = 8/3 - 2 = 2/3 \Rightarrow b = 2/9 \\ 3c = 8/9 - 2/3 = 2/3 \Rightarrow c = 2/27 \end{cases}$ $\quad y_0 : t \mapsto \frac{t^2}{3} + \frac{2t}{9} + \frac{2}{27}$

• CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto Ae^t + Be^{3t} + \frac{t^2}{3} + \frac{2t}{9} + \frac{2}{27}}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

(e) • (EH) $y'' + 4y' = 0$ $\quad (EC)$ $r^2 + 4r = 0 \Leftrightarrow r = 0$ ou $r = -4$

solutions $g : t \mapsto A + Be^{-4t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = at^3 + bt^2 + ct$ alors $y_0'(t) = 3at^2 + 2bt + c$ et $y_0''(t) = 6at + 2b$

Ainsi $y_0''(t) + 4y_0'(t) = 12at^2 + (8b + 6a)t + (4c + 2b)$

⚠ ||| COMME $y_0'' + 4y_0'$ EST DU DEGRÉ DE y_0', ON CHERCHE UNE (SP) DE DEGRÉ 3 donc y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} 12a = 1 \\ 8b+6a = 7 \\ 4c+2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/12 \\ 8b = 7-1/2 = 13/2 \Rightarrow b = 13/16 \\ 4c = -13/8 - 2 = -29/8 \Rightarrow c = -29/32 \end{cases}$

De ce fait, $y_0 : t \mapsto \frac{t^3}{12} + \frac{13t^2}{16} - \frac{29t}{32}$

• CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto A + Be^{-4t} + \frac{t^3}{12} + \frac{13}{16}t^2 - \frac{29}{32}t \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$

(f) (EH) $y'' + 2y' - 8y = 0$ (EC) : $r^2 + 2r - 8 = 0 \Leftrightarrow r = 2$ et $r = -4$

solutions $g : t \mapsto Ae^{2t} + Be^{-4t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

(SP) $y_0(t) = Ke^{3t}$. Alors $y_0'(t) = 3Ke^{3t}$ et $y_0''(t) = 9Ke^{3t}$

d'où $y_0''(t) + 2y_0'(t) - 8y_0(t) = 9Ke^{3t} + 6Ke^{3t} - 8Ke^{3t} = 7Ke^{3t}$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow 7K = 1 \Leftrightarrow K = 1/7$ $y_0 : t \mapsto \frac{1}{7}e^{3t}$

CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto Ae^{2t} + Be^{-4t} + \frac{1}{7}e^{3t} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$

EXO 14

L'équation proposée est une EDL homogène du 2nd ordre

(EC) : $r^2 + ar + b = 0$ $\Delta = a^2 - 4b$

• Si $\Delta = 0$: $r_0 = -a/2$ racine double $\Rightarrow$ solutions $f : t \mapsto (At+B)e^{-at/2}$

qui seront bornées sur $]0, +\infty[$ uniquement si $a > 0$. Dans ce cas, $b = \frac{a^2}{4} > 0$

• Si $\Delta < 0$: en notant $\delta = \sqrt{-\Delta}$, on a $r = -\frac{a+i\delta}{2}$ et $\bar{r} = \frac{-a-i\delta}{2}$

$\Rightarrow$ solutions $f : t \mapsto \left(A\cos\left(\frac{\delta t}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\delta t}{2}\right)\right)e^{-at/2}$

qui sont bornées sur $]0, +\infty[$ uniquement si $a > 0$. Dans ce cas, $b > a^2/4 > 0$

• Si $\Delta > 0$: $r_1 = -\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow$ solution $f : t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

qui sont bornées sur $]0, +\infty[$ si $r_1 < 0$ et $r_2 < 0$, càd $r_1 < 0$ car $r_2 < r_1$

or $r_1 < 0 \Leftrightarrow -a + \sqrt{\Delta} < 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\Delta} < a$: déjà, c'est mort si $a \leq 0$!

Si $a > 0$, $\sqrt{\Delta} < a \Leftrightarrow \Delta < a^2 \Leftrightarrow a^2 - 4b < a^2 \Leftrightarrow b > 0$

Conclusion : $\boxed{\text{les solutions de } y'' + ay' + by = 0 \text{ sont bornées sur }]0, +\infty[\text{ ssi } a > 0 \text{ et } b > 0}$

EXO 15

(a) • (EH) $y''+4y'+4y=0$ (EC) : $r^2+4r+4=0 \Leftrightarrow r=-2$ racine double

$\Rightarrow$ solutions : $g : t \mapsto (At+B)e^{-2t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t)=Q(t)e^{2t}$. Alors $y_0'(t)=Q'(t)e^{2t}+2Q(t)e^{2t}$

et $y_0''(t)=Q''(t)e^{2t}+4Q'(t)e^{2t}+4Q(t)e^{2t}$

donc $y_0''(t)+4y_0'(t)+4y_0(t)=e^{2t}\left(Q''(t)+8Q'(t)+16Q(t)\right)$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow Q''(t)+8Q'(t)+16Q(t)=2t^2+1$

On cherche Q sous la forme $Q(t)=at^2+bt+c$. Alors $Q'(t)=2at+b$ et $Q''(t)=2a$

d'où $Q''(t)+8Q'(t)+16Q(t)=16at^2+(16a+16b)t+(2a+8b+16)$

AINSI y_0 solution $\Leftrightarrow \begin{cases} 16a=2 \\ 16a+16b=0 \\ 2a+8b+16c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/8 \\ b=-1/8 \\ c=\dfrac{-2a-8b}{16}=6/128 \end{cases}$ soit $Q(t)=\dfrac{t^2}{8}-\dfrac{t}{8}+\dfrac{6}{128}$

et $y_0(t)=\left(\dfrac{t^2}{8}-\dfrac{t}{8}+\dfrac{6}{128}\right)e^{2t}$

• CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto (At+B)e^{-2t}+\left(\dfrac{t^2}{8}-\dfrac{t}{8}+\dfrac{6}{128}\right)e^{2t} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$

(b) • (EH) $\Rightarrow$ comme (a) $g : t \mapsto (At+B)e^{-2t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• SP $y_0(t)=Q(t)e^{-2t}$. Alors $y_0'(t)=Q'(t)e^{-2t}-2Q(t)e^{-2t}$

et $y_0''(t)=Q''(t)e^{-2t}-4Q'(t)e^{-2t}+4Q(t)e^{-2t}$

donc $y_0''(t)+4y_0'(t)+4y_0(t)=Q''(t)e^{-2t}$ après simplification

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow Q''(t)=2t^2+1$. On peut prendre $Q'(t)=\dfrac{2t^3}{3}+t$ et $Q(t)=\dfrac{t^4}{6}+\dfrac{t^2}{2}$

si bien que $y_0 : t \mapsto \left(t^4/6+t^2/2\right)e^{-2t}$

• CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto \left(t^4/6+t^2/2+At+B\right)e^{-2t} \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$

(c) • (EH) $y''-2y'+y=0$ (EC) $r^2-2r+1=0 \Leftrightarrow r=1$ racine double

solutions : $g : t \mapsto (At+B)e^{t}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

• (SP1) pour $y''-2y'+y=-e^{-t}$ (E_1) : $y_1(t)=ke^{-t}$. Alors $y_1'(t)=-ke^{-t}$ et $y_1''(t)=ke^{-t}$

d'où $y_1''(t)-2y_1'(t)+y_1(t)=ke^{-t}+2ke^{-t}+ke^{-t}=4ke^{-t}$

donc y_1 solution de $(E_1) \Leftrightarrow 4k=-1 \Leftrightarrow k=-1/4$ $y_1(t)=-\frac{1}{4}e^{-t}$

- $\underline{(SP2)}$ pour $y''-2y'+y=e^t$ (E_2) : $y_2(t)=P(t)e^t$

Alors $y_2'(t)=P'(t)e^t+P(t)e^t$ et $y_2''(t)=P''(t)e^t+2P'(t)e^t+P(t)e^t$

d'où $y_2''(t)-2y_2'(t)+y_2(t)=P''(t)e^t$ après simplification

AINSI y_2 solution de $(E_2) \Leftrightarrow P''(t)=1$. On peut prendre $P'(t)=t$ et $P(t)=t^2/2$

si bien que $\underline{y_2(t)=\frac{1}{2}t^2e^t}$

- $\underline{\text{CONCLUSION}}$ superposition des solution $\Rightarrow$ $\boxed{f: t \mapsto \left(\frac{1}{2}t^2+At+B\right)e^t-\frac{1}{4}e^{-t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$

(d). $\underline{(EH)}$ $y''+2y'+2y=0$ $\quad$ (EC) $r^2+2r+2=0 \Leftrightarrow r=-1+i$ ou $r=-1-i$ deux racines complexes conjuguées

solutions $\underline{g: t \mapsto (A\cos(t)+B\sin(t))e^{-t}}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

- $\underline{(SP)}$ le plus simple est ici de passer en complexes : $2e^{-t}\cos(t)=\operatorname{Re}\left(2e^{(-1+i)t}\right)$

donc on cherche une solution de $y''+2y'+2y=2e^{(-1+i)t}$ sous la forme

$y_0(t)=P(t)e^{(-1+i)t}$ ... et on prendra sa partie réelle ensuite

Alors $y_0'(t)=P'(t)e^{(-1+i)t}+(-1+i)P(t)e^{(-1+i)t}$

$y_0''(t)=P''(t)e^{(-1+i)t}+2(-1+i)P'(t)e^{(-1+i)t}+(-1+i)^2P(t)e^{(-1+i)t}$

donc $y_0''(t)+2y_0'(t)+2y_0(t)=P''(t)e^{(-1+i)t}+2iP'(t)e^{(-1+i)t}+\Big(\underbrace{(-1+i)^2+2(-1+i)+2}_{=0 \text{ cf (E.C)}}\Big)P(t)e^{(-1+i)t}$

$=\left(P''(t)+2iP'(t)\right)e^{(-1+i)t}$

AINSI y_0 solution $\Leftrightarrow P''(t)+2iP'(t)=2$

On peut prendre $P'(t)=\frac{1}{i}=-i$ (car alors $P''(t)=0$) et $P(t)=-it$

Par conséquent $y_0(t)=-it\,e^{(-1+i)t}=-ite^{-t}(\cos t+i\sin t)=e^{-t}(t\sin t-it\cos t)$

$\Rightarrow$ on garde $\underline{y_0(t)=e^{-t}t\sin(t)}$ pour notre équation réelle

- $\underline{\text{CONCLUSION}}$ solutions $\boxed{f: t \mapsto \left(A\cos(t)+B\sin(t)+t\sin(t)\right)e^{-t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$

(e). $\underline{(EH)}$ $y''+4y=0$ $\quad$ (EC) $r^2+4=0 \Leftrightarrow r^2=-4 \Leftrightarrow r=2i$ ou $r=-2i$

solutions $\underline{g: t \mapsto A\cos(2t)+B\sin(2t)}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

- $\underline{(SP)}$ On linéarise d'abord $\cos^2(t)$: $\cos(2t)=2\cos^2(t)-1 \Rightarrow \cos^2(t)=\dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

donc l'équation s'écrit $y''+4y=\frac{t}{2}+\frac{t\cos(2t)}{2}$

- (SP1) pour $y''+4y=\frac{t}{2}$ (E1) : on prend $y_1(t)=at+b$. Alors $y_1''(t)=0$

donc $y_1''+4y_1=4at+4b$ et y_1 solution de (E1) $\Leftrightarrow \begin{cases}4a=1/2\\4b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1/8\\b=0\end{cases}$

soit $y_1: t\mapsto t/8$

- (SP2) pour $y''+4y=\frac{1}{2}t\cos(2t)$ (E2)

$\Rightarrow$ on passe en complexes $y''+4y=\frac{1}{2}te^{2it}$ et on cherche y_2 sous la forme

$y_2(t)=P(t)e^{2it}$. Alors $y_2'(t)=P'(t)e^{2it}+2iP(t)e^{2it}$

et $y_2''(t)=P''(t)e^{2it}+4iP'(t)e^{2it}-4P(t)e^{2it}$

d'où $y_2''(t)+4y_2(t)=[P''(t)+4iP'(t)]e^{2it}$

AINSI y_2 solution de (E2) $\Leftrightarrow P''(t)+4iP'(t)=\frac{1}{2}t$

Prenons $P'(t)=at+b$: alors $P''(t)=a$ et $P''(t)+4iP'(t)=4iat+a+4ib=t/2$

soit $\begin{cases}4ia=1/2\\a+4ib=0\end{cases}$ d'où $\begin{cases}a=1/8i=-i/8\\b=-a/4i=1/32\end{cases}$ et $P'(t)=\frac{-it}{8}+\frac{1}{32}$

On peut prendre $P(t)=\frac{-it^2}{16}+\frac{t}{32}$ si bien que $y_2(t)=\left(\frac{-it^2}{16}+\frac{t}{32}\right)e^{2it}$

$y_2(t)=\left(\frac{-it^2}{16}+\frac{t}{32}\right)(\cos(2t)+i\sin(2t))=\frac{t^2}{16}\sin(2t)+\frac{t\cos(2t)}{32}+i(\dots)$

$\Rightarrow$ on garde $y_2(t)=\frac{t^2}{16}\sin(2t)+\frac{t}{32}\cos(2t)$ pour notre équation réelle

- CONCLUSION solutions $\boxed{f: t\mapsto\left(\frac{t}{32}+A\right)\cos(2t)+\left(\frac{t^2}{16}+B\right)\sin(2t) \text{ avec } A \text{ et } B\in\mathbb{R}}$

(f) - (EH) $y''-2y'+2y=0$ (EC) $r^2-2r+2=0 \Leftrightarrow r=1+i$ ou $r=1-i$

solutions $g: t\mapsto(A\cos(t)+B\sin(t))e^t$

- (SP) $y_0(t)=a\cos(t)+b\sin(t)$. Alors $y_0'(t)=-a\sin(t)+b\cos(t)$ et $y_0''(t)=-a\cos(t)-b\sin(t)$
$=-y_0(t)$

d'où $y_0''(t)-2y_0'(t)+2y_0(t)=(a-2b)\cos(t)+(b+2a)\sin(t)$

AINSI y_0 solution $\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=0\\b+2a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2b\\5b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4/5\\b=2/5\end{cases}$ soit $y_0(t)=\frac{4\cos(t)+2\sin(t)}{5}$

CONCLUSION solutions $\boxed{f: t\mapsto(A\cos(t)+B\sin(t))e^t+\frac{4\cos(t)+2\sin(t)}{5} \text{ avec } A \text{ et } B\in\mathbb{R}}$

EXO 17

1) . (EH) $y'-y=0 \Rightarrow$ solutions $g : t \mapsto Ce^t$ avec $C \in \mathbb{R}$

. (SP) $y_0(t)=C(t)e^t$. Alors $y_0'(t)=C'(t)e^t+C(t)e^t$ donc $y_0'(t)-y_0(t)=C'(t)e^t$

Ainsi y_0 solution de $(E) \Leftrightarrow C'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$: on peut prendre $C(t)=\sqrt{t}$ soit $y_0(t)=\sqrt{t}e^t$

. CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto (C+\sqrt{t})e^t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

2). PETIT CAUCHY ! Pour une telle fonction, $f(1)=e \Leftrightarrow (C+1)e=e \Leftrightarrow C+1=1 \Leftrightarrow C=0$

Ainsi, la solution de (E) pour laquelle $f(1)=e$ est $\boxed{f : t \mapsto \sqrt{t}e^t \text{ sur }]0,+\infty[}$

3) $f(t)=\sqrt{t}e^t$, $f'(t)=\sqrt{t}e^t+\frac{e^t}{2\sqrt{t}}$, $f''(t)=\sqrt{t}e^t+\frac{e^t}{\sqrt{t}}+e^t \times \frac{-1/\sqrt{t}}{4t}$

donc $f''(t)+f(t)=2\sqrt{t}e^t+\frac{e^t}{\sqrt{t}}-\frac{e^t}{4t\sqrt{t}}$ soit $f''(t)-2f'(t)+f(t)=\frac{-e^t}{4t\sqrt{t}}$

AINSI $\boxed{f \text{ est une solution de (F) sur }]0,+\infty[}$ Cool ! On a une solution particulière

4) . (EH) $y''-2y'+y=0$ (EC) $r^2-2r+1=0 \Leftrightarrow (r-1)^2=0$: $r_0=1$ racine double

solutions $g : t \mapsto (At+B)e^t$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

. (SP) $y_0 : t \mapsto \sqrt{t}e^t$

. CONCLUSION solutions de (E) $\boxed{f : t \mapsto (At+B)e^t+\sqrt{t}e^t \text{ avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$

EXO 18

1) . (EH) $y''+(1-2m)y'-2my=0$ (EC) $r^2+(1-2m)r-2m=0$

$\Leftrightarrow r^2+r-2m(r+1)=0$

$\Leftrightarrow (r+1)(r-2m)=0 \Leftrightarrow r=-1$ ou $r=2m>0$

(2 racines distinctes)

solutions $g : t \mapsto Ae^{-t}+Be^{2mt}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$

. (SP) $y_0(t)=ke^{2t}$ Alors $y_0'(t)=2ke^{2t}$ et $y_0''(t)=4ke^{2t}$ si $m \neq 1$

d'où $y_0''(t)+(1-2m)y_0'(t)-2my_0(t)=\left(4K+(1-2m)2K-2mK\right)e^{2t}$
$= 6K(1-m)e^{2t}$

donc y_0 solution $\Leftrightarrow 6K(1-m)=1 \Leftrightarrow K=1/6(1-m)$ soit $y_0 : t \mapsto e^{2t}/6(1-m)$

• CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto Ae^{-t}+Be^{2mt}+\dfrac{e^{2t}}{6(1-m)}}$ avec A et $B\in\mathbb{R}$

• PETIT CAUCHY ! Pour une telle fonction, on a $f'(t)=-Ae^{-t}+2mBe^{2mt}+\dfrac{e^{2t}}{3(1-m)}$

donc $\begin{cases} f(t)=0 \\ f'(t)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+\dfrac{1}{6(1-m)}=0 \\ -A+2mB+\dfrac{1}{3(1-m)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=\dfrac{1}{6(m-1)} & (L1) \\ -A+2mB=\dfrac{1}{3(m-1)} & (L2) \end{cases}$

$(L1)+(L2)$: $(2m+1)B=\dfrac{1}{2(m-1)}$ d'où $B=\dfrac{1}{(2m+1)2(m-1)}$

et $A=\dfrac{1}{6(m-1)}-\dfrac{1}{(2m+1)2(m-1)}=\dfrac{(2m+1)-3}{6(2m+1)(m-1)}=\dfrac{2m-2}{6(m-1)(2m+1)}=\dfrac{1}{3(2m+1)}$

AINSI l'unique solution de (E) vérifiant $f(0)=f'(0)=0$ est

$\boxed{y_m : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{3(2m+1)}+\dfrac{e^{2mt}}{2(m-1)(2m+1)}+\dfrac{e^{2t}}{6(1-m)}}$ pour $m\neq 1$

(SP) (Si $m=1$) $y_0(t)=P(t)e^{2t}$. Alors $y_0'(t)=P'(t)e^{2t}+2P(t)e^{2t}$
et $y_0''(t)=P''(t)e^{2t}+4P'(t)e^{2t}+4P(t)e^{2t}$

d'où $y_0''(t)+(1-2m)y_0'(t)-2my_0(t)=y_0''(t)-y_0'(t)-2y_0(t)$
$=P''(t)e^{2t}+3P'(t)e^{2t}=\left(P''(t)+3P'(t)\right)e^{2t}$

AINSI y_0 solution $\Leftrightarrow P''(t)+3P'(t)=1$. On peut prendre $P'(t)=1/3$ (car alors $P''(t)=0$)
et $P(t)=t/3$, càd $y_0(t)=\dfrac{t}{3}e^{2t}$

• CONCLUSION solutions $\boxed{f : t\mapsto Ae^{-t}+\left(B+\dfrac{t}{3}\right)e^{2t} \text{ avec } A \text{ et } B\in\mathbb{R}}$

• QUEL CAUCHY ! Pour une telle fonction, on a $f'(t)=-Ae^{-t}+\left(2B+\dfrac{2t}{3}\right)e^{2t}+\dfrac{1}{3}e^{2t}$

donc $\begin{cases} f(1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+2B+\frac{1}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 3B+\frac{1}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/9 \\ B=-1/9 \end{cases}$

AINSI l'unique solution de (E) vérifiant $f(0)=f'(0)=0$ est

$\boxed{y_1 : t \mapsto \frac{e^{-t}}{9}+\left(\frac{t}{3}-\frac{1}{9}\right)e^{2t}}$ dans le cas où $m=1$

2) Pour $m\neq 1$ et $t\in\mathbb{R}$, on a d'après ce qui précède

$y_m(t)=\frac{e^{-t}}{3(2m+1)}+\frac{e^{2mt}}{2(m-1)(2m+1)}-\frac{e^{2t}}{6(m-1)}$. Posons $m=1+h$: on obtient alors

$$y_{1+h}(t)=\frac{e^{-t}}{3(3+2h)}+\frac{e^{2t+2ht}}{2h(3+2h)}-\frac{e^{2t}}{6h}=\frac{e^{-t}}{3(3+2h)}+\frac{e^{2t}}{6h(3+2h)}\underbrace{\left(3e^{2ht}-3-2h\right)}_{3(e^{2ht}-1)-2h}$$

$$=\frac{e^{-t}}{3(3+2h)}+\frac{e^{2t}}{3+2h}\times\frac{e^{2ht}-1}{2h}-\frac{e^{2t}}{3(3+2h)}$$

Comme $\lim\limits_{h\to 0} 3+2h=3$ et que $e^{2ht}-1 \underset{h\to 0}{\sim} 2ht$ d'où $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^{2ht}-1}{2h}=t$

on en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} y_{1+h}(t)=\frac{e^{-t}}{9}+\frac{e^{2t}}{3}t-\frac{e^{2t}}{9}=y_1(t)$

si bien que $\boxed{\lim\limits_{m\to 1} y_m(t)=y_1(t) \text{ pour tout } t\in\mathbb{R}}$

EXO 19

- On recherche les solutions sous la forme $y(t)=tz(t)$ pour $t\in\,]0,+\infty[$
  Alors $y'(t)=z(t)+tz'(t)$ et $y''(t)=2z'(t)+tz''(t)$
  donc $t^2y''(t)-2ty'(t)+(2-t^2)y(t)=2t^2z'(t)+t^3z''(t)-2tz(t)-2t^2z'(t)+(2t-t^3)z(t)$
  $=t^3\left(z''(t)-z(t)\right)$
- De ce fait, y solution de (E) $\Leftrightarrow z''(t)-z(t)=0$
  (EC) : $r^2-1=0 \Leftrightarrow r=1$ ou -1 $\rightsquigarrow$ solutions $z : t\mapsto Ae^{t}+Be^{-t}$ avec A et $B\in\mathbb{R}$
- CONCLUSION solutions $\boxed{y : t\mapsto Ate^{t}+Bte^{-t} \text{ sur }]0,+\infty[\text{ avec } A \text{ et } B\in\mathbb{R}}$

EXO 20

1) • Si l'on recherche y sous la forme $y(t)=z(\sin t)$, on a alors

$$y'(t)=\cos t\times z'(\sin t) \quad \text{et} \quad y''(t)=-\sin(t)\,z'(\sin t)+\cos^2(t)\,z''(\sin t)$$

d'où $y''(t)+y'(t)\tan(t)-y(t)\cos^2(t)=\cos^2(t)\,z''-\sin(t)\,z'+\underbrace{\cos(t)\tan(t)}_{=\sin(t)}z'-\cos^2(t)\,z$

$$=\cos^2(t)(z''-z)$$

• Comme $\cos^2(t)\neq 0$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on en déduit que y est solution de $(E)\Leftrightarrow z''-z=0$

Ceci conduit (cf. exo 19 !) à $z(u)=Ae^{u}+Be^{-u}$ avec A et $B\in\mathbb{R}$

• CONCLUSION solutions sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ $\boxed{f: t\mapsto Ae^{\sin(t)}+Be^{-\sin(t)} \text{ avec } A \text{ et } B\in\mathbb{R}}$

2) • Si l'on cherche y sous la forme $y(t)=z(t^2)$, on obtient alors

$$y'(t)=2t\,z'(t^2) \quad \text{et} \quad y''(t)=2z'(t^2)+4t^2z''(t^2)$$

d'où $ty''+(4t^2-1)y'+4t^3y=2tz'+4t^3z''+(8t^3-2t)z'+4t^3z$

$$=4t^3(z''+2z'+z)$$

• Comme $4t^3\neq 0$ sur $]0,+\infty[$, on en déduit que y est solution de $(E)\Leftrightarrow z''+2z'+z=2$ (F)

* (EH) $z''+2z'+z=0$ (EC) $r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow (r+1)^2=0$: $r=-1$ racine double

  $\leadsto$ solutions $g: u\mapsto (Au+B)e^{-u}$ avec A et $B\in\mathbb{R}$

* (SP) $z_0=K \leadsto K=2$ donc $z_0: u\mapsto 2$
* CONCLUSION les solutions de (F) sont les fonctions $z: u\mapsto (Au+B)e^{-u}+2$

• On en déduit que les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions $\boxed{f: t\mapsto (At^2+B)e^{-t^2}+2 \text{ avec } A \text{ et } B\in\mathbb{R}}$

3) Avec $y(t)=z(e^{-t})$ on obtient $y'(t)=-e^{-t}z'(e^{-t})$ et $y''(t)=e^{-t}z'(e^{-t})+e^{-2t}z''(e^{-2t})$

d'où $y''+y'+e^{-2t}y=e^{-2t}z''+e^{-2t}z=e^{-2t}(z''+z)$

AINSI y solution de $(E)\Leftrightarrow z''+z=e^{-2t}+2e^{-t}-3=u^2+2u-3$ (F)

• (EH) $z''+z=0$ (EC) $r^2+1=0\Leftrightarrow r=\pm i$ $\leadsto$ solutions $g: u\mapsto A\cos(u)+B\sin(u)$

• (SP) $z_0(u)=au^2+bu+c$: $z_0'(u)=2au+b$ et $z_0''(u)=2a$

donc $z_0''+z_0=au^2+bu+(c+2a)$. AINSI z_0 solution de (F) $\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=2\\ c+2a=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1\\ b=2\\ c=-5\end{cases}$

d'où $z_0: u\mapsto u^2+2u-5$

• CONCLUSION les solutions de (F) sont les fonctions $z: u\mapsto A\cos(u)+B\sin(u)+u^2+2u-5$

On en déduit que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$\boxed{f : t \mapsto A\cos(e^{-t}) + B\sin(e^{-t}) + e^{-2t} + 2e^{-t} - 5 \quad \text{avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$$

4) Pour $y(t) = z(\ln(t))$, on obtient $y'(t) = \frac{1}{t} z'(\ln t)$ et $y''(t) = -\frac{1}{t^2} z'(\ln t) + \frac{1}{t^2} z''(\ln t)$

de sorte que $t^2 y''(t) + 3t y'(t) + y(t) = z'' - z' + 3z' + z = z'' + 2z' + z$

AINSI y solution de (E) $\Leftrightarrow z''(u) + 2z'(u) + z(u) = 1 + t^2 = 1 + e^{2u}$ (F)

* (EH) $z'' + 2z' + z = 0$ (Encore !) $\rightsquigarrow$ solutions $g : u \mapsto (Au+B)e^{-u}$ avec A et $B \in \mathbb{R}$
* (SP) $z_0(u) = K_1 + K_2 e^{2u}$ alors $z_0'(u) = 2K_2 e^{2u}$ et $z_0''(u) = 4K_2 e^{2u}$

  d'où $z_0''(u) + 2z_0'(u) + z_0(u) = 9K_2 e^{2u} + K_1$

  AINSI z_0 solution de (F) $\Leftrightarrow K_1 = 1$ et $K_2 = 1/9$. De ce fait, $z_0 : u \mapsto 1 + \frac{e^{2u}}{9}$
* CONCLUSION solutions de (F) $\quad z : u \mapsto (Au+B)e^{-u} + 1 + \frac{e^{2u}}{9}$ avec A et B

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions

$$\boxed{f : t \mapsto \frac{A\ln(t) + B}{t} + 1 + \frac{t^2}{9} \quad \text{avec } A \text{ et } B \in \mathbb{R}}$$

EXO 21

Sur $]-\infty; -1[$ ou $]-1, +\infty[$, l'équation s'écrit $y'' + \frac{1}{1+x} y' = \frac{2}{(1+x)^2}$ (E)

* Notons $z = y'$: alors (E) $\Leftrightarrow z' + \frac{1}{1+x} z = \frac{2}{(1+x)^2}$ (F)

- (EH) $z' + \frac{1}{1+x} z = 0 \rightsquigarrow a(x) = \frac{1}{1+x}$ et $A(x) = \ln|1+x|$

  donc les solutions sont les fonctions $\quad g_C : x \mapsto C e^{-\ln|1+x|} = \frac{C}{|1+x|} = \frac{\pm C}{1+x}$

- (SP) $z_0(x) = \frac{C(x)}{1+x}$. Alors $z_0'(x) = \frac{C'(x)}{1+x} - \frac{C(x)}{(1+x)^2}$ et $z_0'(x) + \frac{1}{1+x} z_0(x) = \frac{C'(x)}{1+x}$

  De ce fait z_0 solution de (F) $\Leftrightarrow C'(x) = \frac{2}{1+x}$. On peut prendre $C(x) = 2\ln|1+x|$

  si bien que $z_0 : x \mapsto \frac{\ln((1+x)^2)}{1+x}$ $\qquad = \ln((1+x)^2)$

- CONCLUSION les solutions de (F) sont les fonctions $\boxed{z : x \mapsto \frac{C + \ln((1+x)^2)}{1+x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$

Mais ce n'est pas encore fini ! On a seulement trouvé y'

* Ainsi y solution de (E) ssi $y'(x) = \dfrac{C + \ln((1+x)^2)}{1+x}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Il n'y a plus qu'à trouver les primitives de cette superbe expression

Sur $]-1;+\infty[$

$$y'(x) = \frac{C}{1+x} + 2 \times \frac{1}{1+x} \times \ln(1+x)$$

donc $\boxed{y(x) = C\ln(1+x) + (\ln(1+x))^2 + D \quad \text{avec } C \text{ et } D \in \mathbb{R}}$

Sur $]-\infty;-1[$

$$y'(x) = \frac{C}{1+x} + \frac{2\ln|1+x|}{1+x} = \frac{C}{1+x} + 2 \times \frac{1}{1+x} \times \ln|1+x|$$

donc $\boxed{y(x) = C\ln|1+x| + 2\,(\ln|1+x|)^2 + D \quad \text{avec } C \text{ et } D \in \mathbb{R}}$

Et voilà ! C'est fini pour ce joli chapitre...
il y a effectivement une overdose d'exercices, mais vous aurez au moins de quoi vous entraîner !