

CHAPITRE XIV

EXERCICE 1

IDÉE Exprimer $\vec{AG'}$, $\vec{AH'}$ et $\vec{AI'}$ en fonction de $\vec{AB'}$, $\vec{AC'}$ et $\vec{AD'}$

$$\vec{GB'} = 4\vec{GA'} \Rightarrow \vec{GA'} + \vec{AB'} = 4\vec{GA'} \Rightarrow \vec{AB'} = 3\vec{GA'} \Rightarrow \underline{\vec{AG'} = -\frac{1}{3}\vec{AB'}}$$

$$3\vec{CH'} = \vec{CD'} \Rightarrow 3(\vec{CA'} + \vec{AH'}) = \vec{CA'} + \vec{AD'} \Rightarrow 3\vec{AH'} = -2\vec{CA'} + \vec{AD'} \Rightarrow \underline{\vec{AH'} = \frac{2}{3}\vec{AC'} + \frac{1}{3}\vec{AD'}}$$

$$6\vec{AI'} = \vec{BD'} + 2\vec{AC'} \Rightarrow \vec{AI'} = \frac{1}{6}(\vec{BA'} + \vec{AD'}) + \frac{1}{3}\vec{AC'} \Rightarrow \underline{\vec{AI'} = -\frac{1}{6}\vec{AB'} + \frac{1}{3}\vec{AC'} + \frac{1}{6}\vec{AD'}}$$

De ce fait $\vec{GH'} = \vec{GA'} + \vec{AH'} = \frac{1}{3}\vec{AB'} + \frac{2}{3}\vec{AC'} + \frac{1}{3}\vec{AD'}$

et $\vec{GI'} = \frac{1}{6}\vec{AB'} + \frac{1}{3}\vec{AC'} + \frac{1}{6}\vec{AD'}$ d'où $\vec{GI'} = \frac{1}{2}\vec{GH'}$

ainsi, I est le milieu de $[GH]$

EXERCICE 2 Encore plus simple que l'exercice précédent !

$$1) \vec{EF'} = \vec{EA'} + \vec{AF'} = -2\vec{AD'} - 3\vec{AC'} + 3\vec{BC'} + 2\vec{BD'} = 3(\underbrace{\vec{BC'} + \vec{CA'}}_{\vec{BA'}}) + 2(\underbrace{\vec{BD'} + \vec{DA'}}_{\vec{BA'}}) = 5\vec{BA'}$$

2) Les droites (EF) et (BA) sont donc parallèles.
Elles peuvent être même confondues si A, B, C, D sont alignés

IDÉE GÉNÉRALE avec des relations vectorielles faisant intervenir peu de points, il est souvent intéressant de l'arranger pour que les vecteurs aient tous la même origine. Cela minimise le nombre de vecteurs inconnus...

EX03

$$I = M[AB] \text{ donc } \vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB}$$

Commençons par exprimer $\vec{AI}'$ et $\vec{AJ}'$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ uniquement

$$J = M[CI] \text{ donc } \vec{CJ} = \frac{1}{2} \vec{CI} \text{ soit } \vec{CA}' + \vec{AJ}' = \frac{1}{2} (\vec{CA} + \vec{AI})$$

$$\text{d'où } \vec{AJ}' = \frac{1}{2} \vec{AC}' + \frac{1}{2} \vec{AI}' = \frac{1}{4} \vec{AB}' + \frac{1}{2} \vec{AC}'$$

$$K = M[DJ] \text{ donc } \vec{DK}' = \frac{1}{2} \vec{DJ}' \text{ soit } \vec{DA}' + \vec{AK}' = \frac{1}{2} (\vec{DA}' + \vec{AJ}')$$

$$\text{d'où } \vec{AK}' = \frac{1}{2} \vec{AD}' + \frac{1}{2} \vec{AJ}' = \boxed{\frac{1}{8} \vec{AB}' + \frac{1}{4} \vec{AC}' + \frac{1}{2} \vec{AD}'}$$

EX04

1) Dans le repère, $A(0;0)$ $B(1;0)$ et $C(0;1)$

$$E = M[BC] \text{ donc } E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$F = M[AE] \text{ donc } F\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$$

Equation de (BF): pour $M(x;y)$ on a $\vec{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{BF}\begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

$$\text{donc } M \in (BF) \Leftrightarrow \det(\vec{BM}, \vec{BF}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & -3/4 \\ y & 1/4 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(x-1) + \frac{3}{4}y = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x + 3y = 1}$$

Equation de (AC) c'est l'axe des ordonnées donc (AC): $x = 0$

Ainsi les coordonnées de G vérifient $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/3 \end{cases} \text{ donc } G(0; 1/3)$

2) Autrement dit, $\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{3} \vec{AC}}$

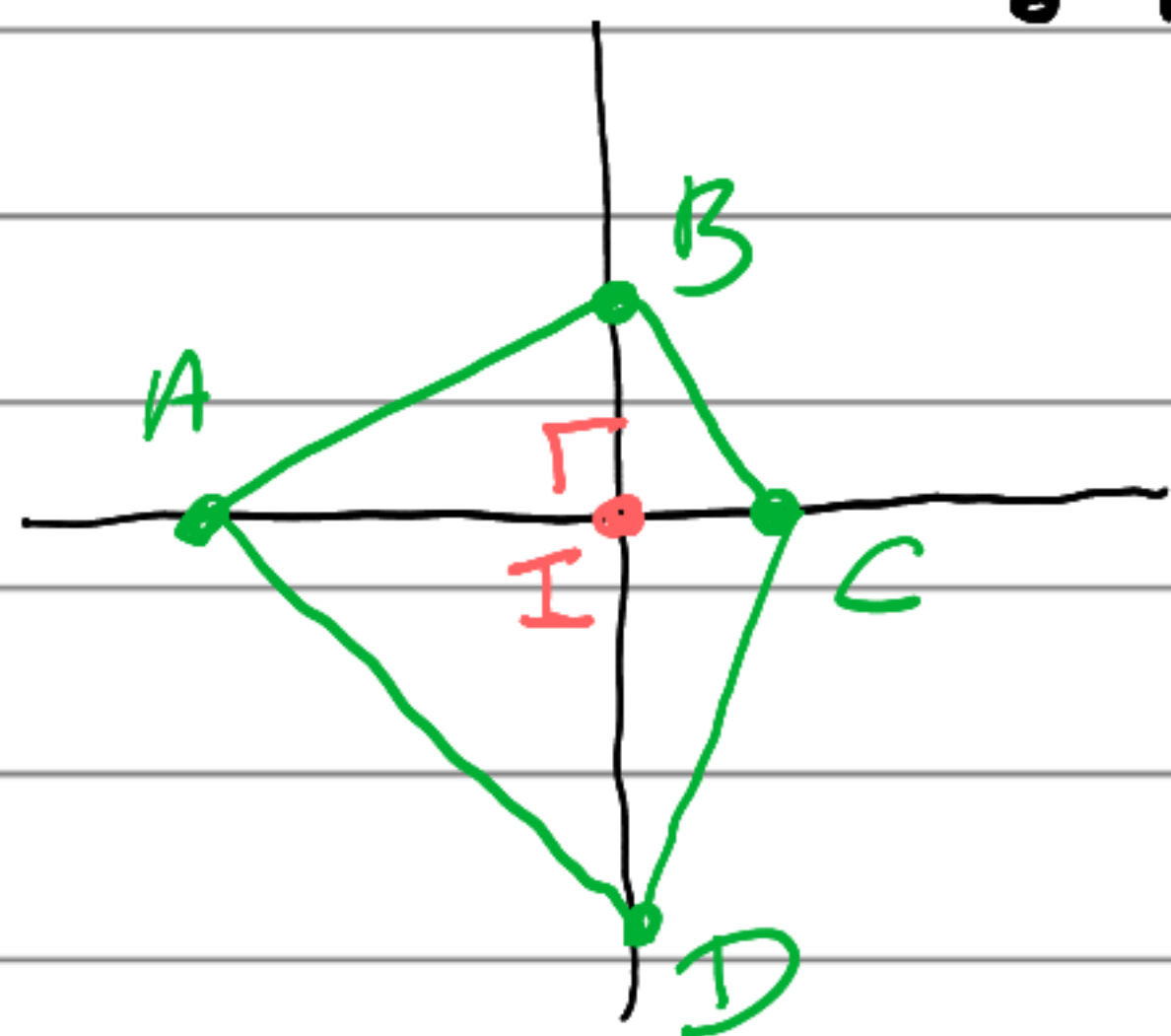
EX05

$$\begin{aligned} DA^2 - DC^2 &= (\vec{DA} + \vec{DC}) \cdot (\vec{DA} + \vec{DC}) = (\vec{DA} + \vec{DC}) \cdot \vec{CA} \text{ et } BC^2 - BA^2 = (\vec{CB} + \vec{AB}) \cdot (\vec{CB} + \vec{BA}) \\ \text{donc } DA^2 + BC^2 - DC^2 - BA^2 &= (\vec{DA} + \vec{AB} + \vec{DC} + \vec{CB}) \cdot \vec{CA} = (\vec{CB} + \vec{AB}) \cdot \vec{CA} \\ &= 2 \vec{DB} \cdot \vec{CA} = 0 \quad \text{c.f. } (DB) \perp (CA) \end{aligned}$$

EXO 5 sans produit scalaire !

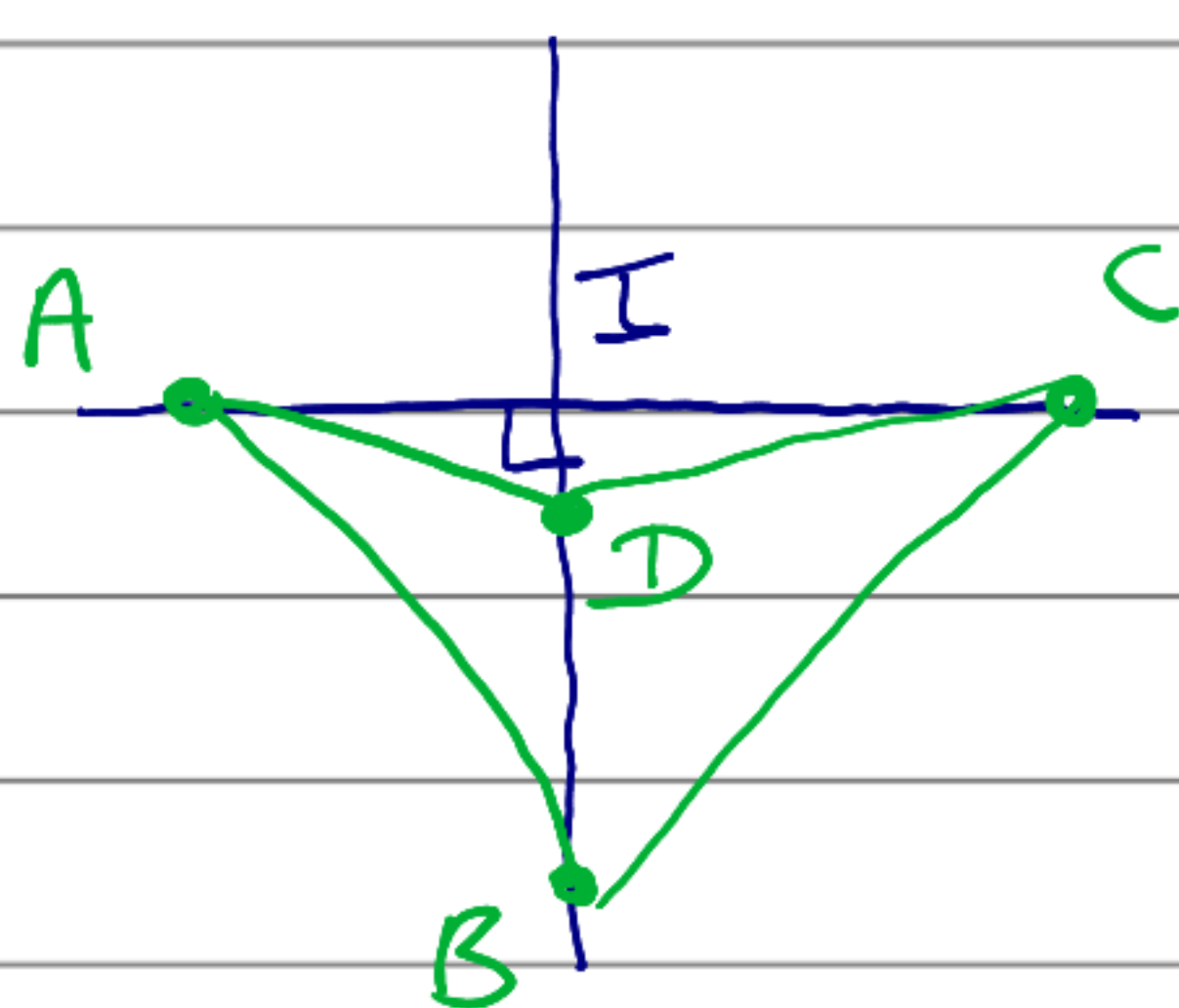
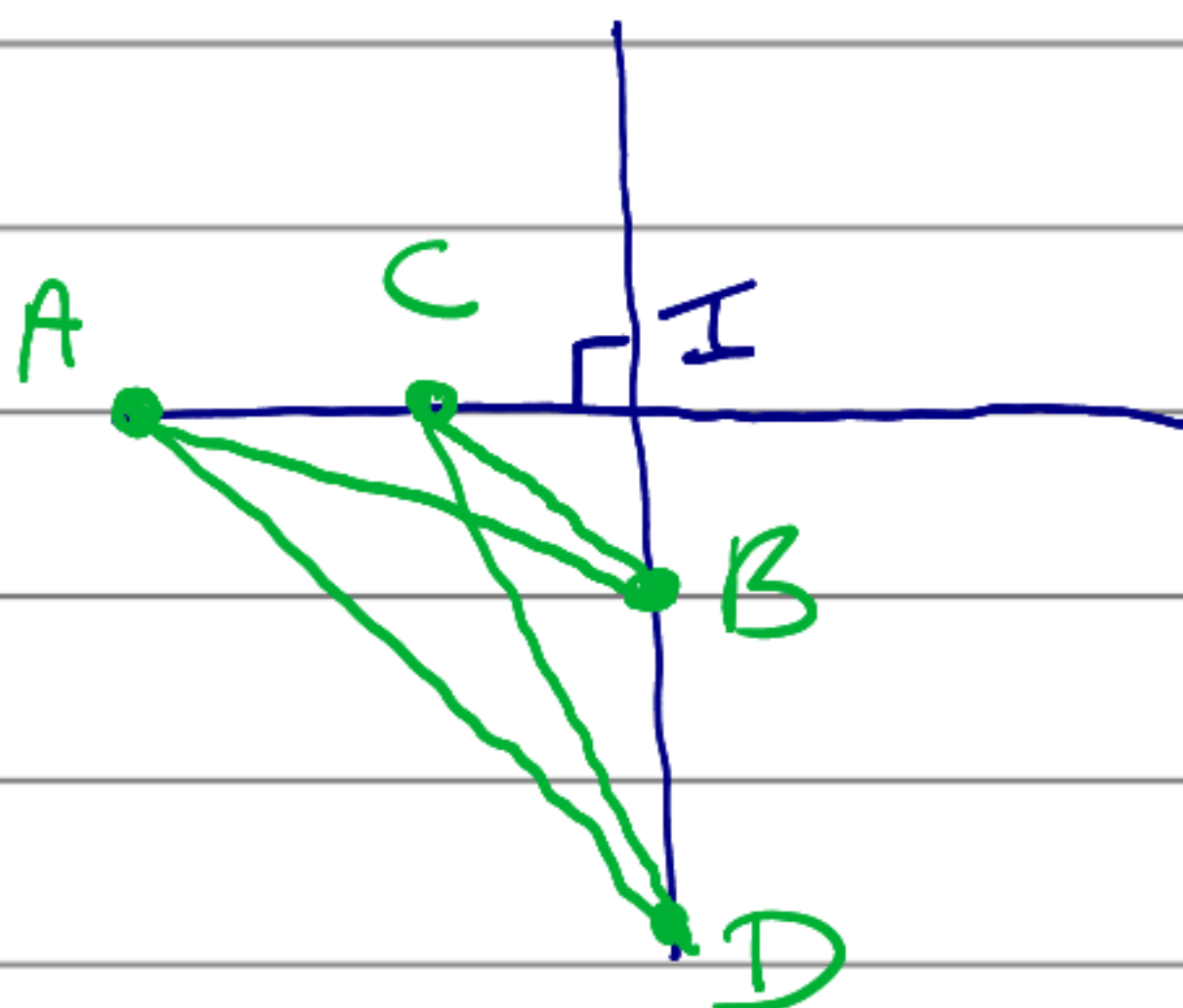
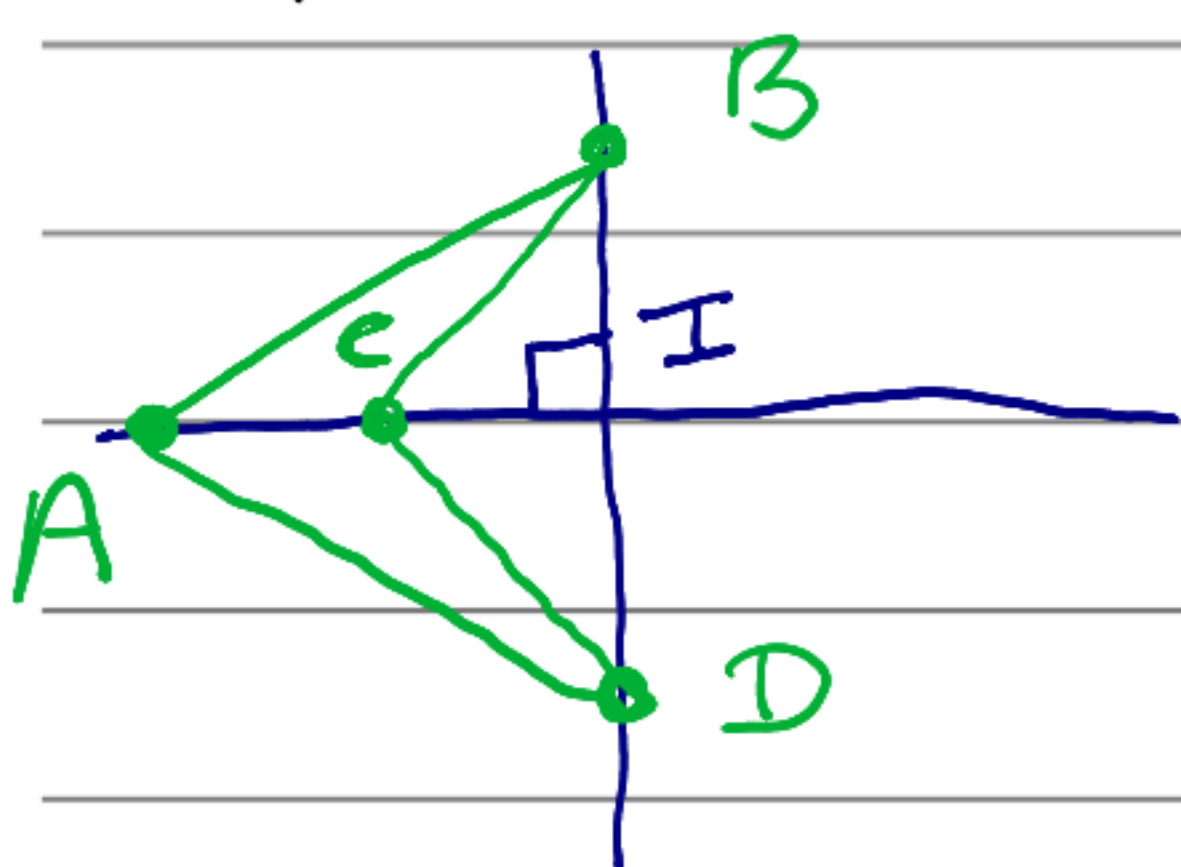
- Notons I l'intersection de (AC) et (BD)

PYTHAGORE dans les triangles rectangles AIB, BIC, CID et DIA :



$$\begin{aligned} AB^2 + DC^2 &= (AI^2 + IB^2) + (DI^2 + IC^2) \\ &= (AI^2 + ID^2) + (BI^2 + IC^2) \\ &= AD^2 + BC^2 \end{aligned}$$

- Attention toutefois, ce n'est pas la seule configuration possible : il faut vérifier que cela fonctionne dans les autres cas de figure



Quelle que soit la configuration, on retrouve les 4 mêmes triangles rectangles AIB, BIC, CID et DIA donc les relations entre les côtés restent les mêmes.

EXO 6

Notons $D(x; y) \in \mathcal{P}$. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si, $\vec{BA} = \vec{CD}$ (1)

Or $\vec{BA} \begin{pmatrix} 2-4=-2 \\ -3+1=-2 \end{pmatrix}$ et $\vec{CD} \begin{pmatrix} x+4 \\ y-5 \end{pmatrix}$ donc (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=-2 \\ y-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-6 \\ y=3 \end{cases}$

Ainsi $\boxed{D(-6; 3)}$

Vérification: $\vec{BA} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

EXO 7

Soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $AM=4$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = 6$

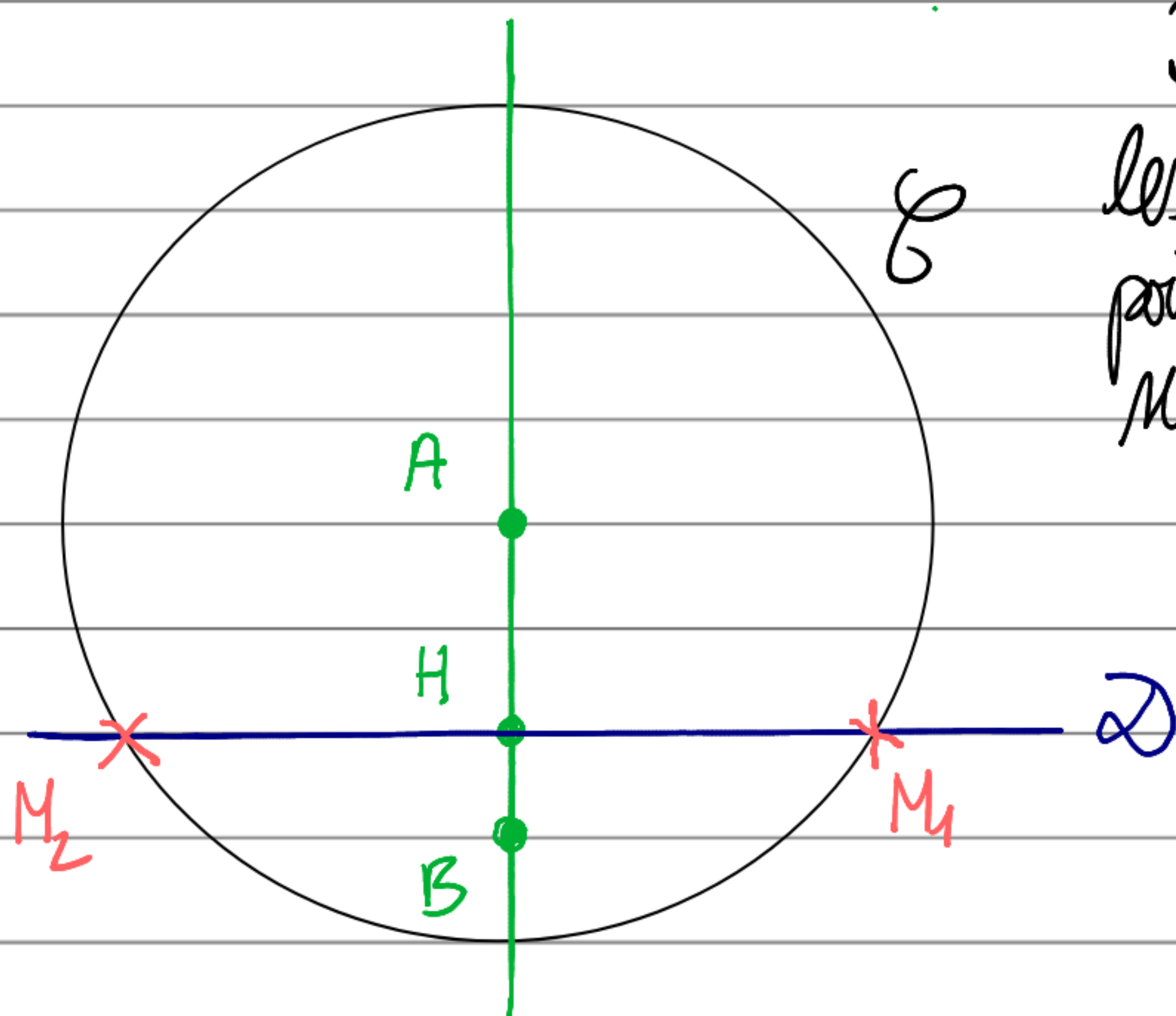
* $AM=4$ donc M est sur le cercle de centre A et de rayon 4 (appelons le $\mathcal{C}$)

* Notons H le projeté orthogonal de M sur (AB)

Alors $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = 6$ donc $\vec{AH}$ a le même sens que $\vec{AB}$ et

$$AB \times AH = 6 = 3 \times AH \text{ d'où } AH=2 \text{ donc } \vec{AH} = \frac{2}{3} \vec{AB}$$

De ce fait, M est sur la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à (AB) et passant par le point H défini par $\vec{AH} = \frac{2}{3} \vec{AB}$



De ce fait, les points M vérifiant les conditions requises sont les deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$, notés M_1 et M_2 sur le dessin

(Idée) ne faire apparaître que des vecteurs d'origine A

EXO 8

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC}$$

$$= \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AD}) + \vec{AC} \cdot (\vec{DA} + \vec{AB}) + \vec{AD} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC})$$

$$= -\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} - \vec{AC} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AC} - \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AC} \cdot \vec{AD}$$

$$= 0 \quad \text{CQFD!}$$

$$\begin{cases} \vec{BA} \cdot \vec{BD} \leq 0 \\ \vec{DA} \cdot \vec{DC} \leq 0 \end{cases}$$

$$? AC \geq BD$$

EXO 9

$$\begin{aligned} AC^2 &= \vec{AC}^2 = (\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DC})^2 = (\vec{BD} + (\vec{AB} + \vec{DC}))^2 = \vec{BD}^2 + 2\vec{BD} \cdot (\vec{AB} + \vec{DC}) + (\vec{AB} + \vec{DC})^2 \\ &= \vec{BD}^2 - \underbrace{2\vec{BD} \cdot \vec{BA}}_{\geq 0} - \underbrace{2\vec{DB} \cdot \vec{DC}}_{\geq 0} + \underbrace{\|\vec{AB} + \vec{DC}\|^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$$\text{donc } AC^2 \geq BD^2$$

$$\text{soit } \boxed{AC \geq BD}$$

EXO 10

Dans chaque cas, décomposer $\vec{MA}' = \vec{MI}' + \vec{IA}'$ et $\vec{MB}' = \vec{MI}' + \vec{IB}'$
en notant que $\vec{IA}' = -\frac{1}{2}\vec{AB}'$ et $\vec{IB}' = \frac{1}{2}\vec{AB}'$

$$\begin{aligned} 1) \quad MA^2 + MB^2 &= \vec{MA}'^2 + \vec{MB}'^2 = (\vec{MI}' - \frac{1}{2}\vec{AB}')^2 + (\vec{MI}' + \frac{1}{2}\vec{AB}')^2 \\ &= \vec{MI}'^2 - \vec{MI}' \cdot \vec{AB}' + \frac{1}{4}\vec{AB}'^2 + \vec{MI}'^2 + \vec{MI}' \cdot \vec{AB}' + \frac{1}{4}\vec{AB}'^2 \\ &= 2\vec{MI}'^2 + \frac{1}{2}\vec{AB}'^2 \end{aligned}$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$\begin{aligned} 2) \quad MA^2 - MB^2 &= \vec{MA}'^2 - \vec{MB}'^2 = (\vec{MA}' + \vec{MB}') \cdot (\vec{MA}' - \vec{MB}') = 2\vec{MI}' \cdot (\vec{MA}' + \vec{MB}') \\ &= 2\vec{MI}' \cdot \vec{BA}' \end{aligned}$$

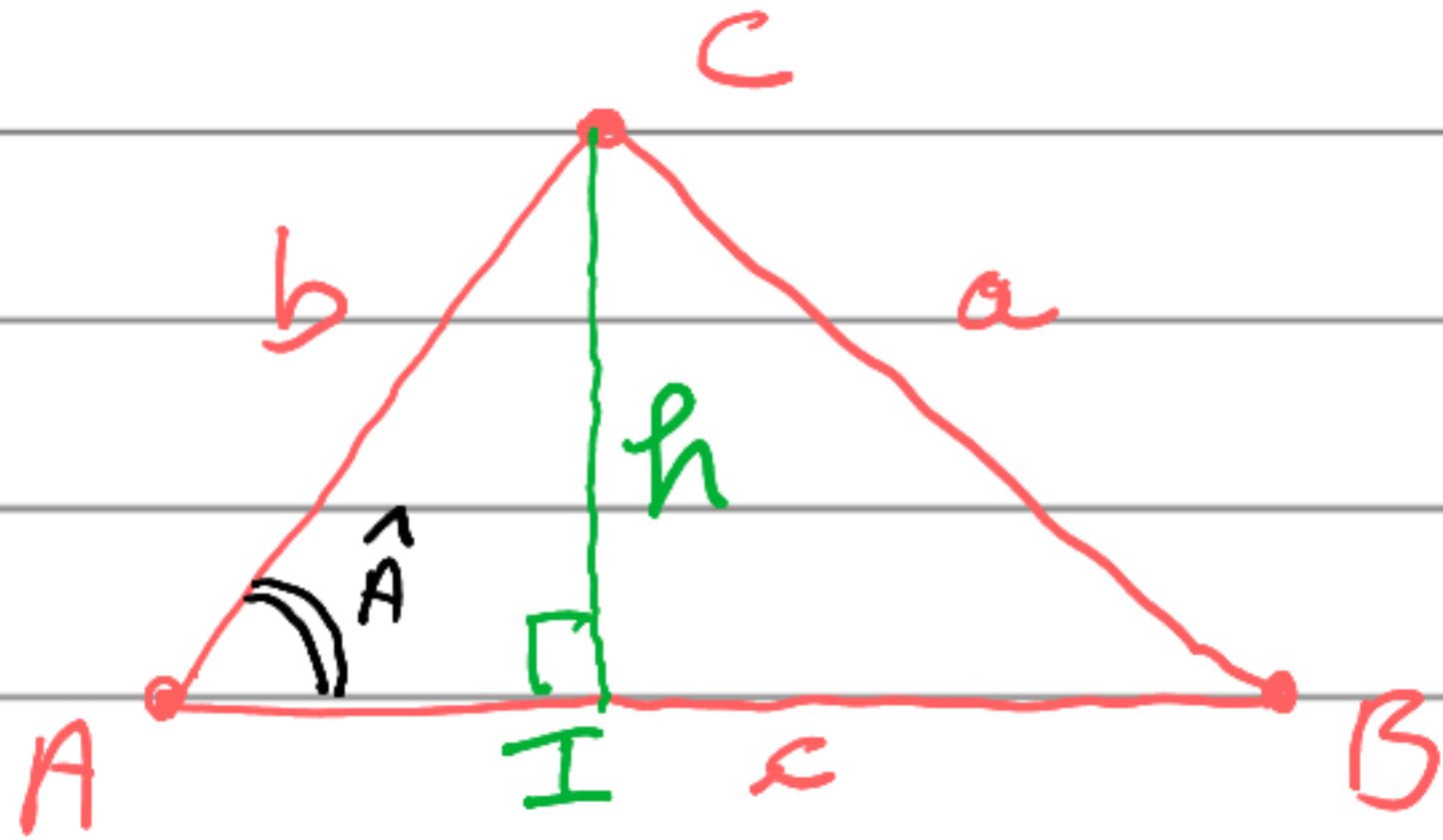
$$MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI}' \cdot \vec{BA}'$$

$$3) \quad \vec{MA}' \cdot \vec{MB}' = (\vec{MI}' - \frac{1}{2}\vec{AB}') \cdot (\vec{MI}' + \frac{1}{2}\vec{AB}') = \vec{MI}'^2 - \frac{1}{4}\vec{AB}'^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

$$\vec{MA}' \cdot \vec{MB}' = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

EXO 11

$$\begin{aligned} 1) \quad a^2 &= BC^2 = \vec{BC}'^2 = (\vec{BA}' + \vec{AC}')^2 \\ &= (\vec{AC}' - \vec{AB}')^2 \\ &= \vec{AC}'^2 - 2\vec{AC}' \cdot \vec{AB}' + \vec{AB}'^2 \\ &= b^2 - 2bc \cos(\hat{A}) + c^2 \end{aligned}$$



d'où

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

$$2) \quad 2S = \text{Base} \times \text{Hauteur} = AB \times h = c \times h$$

Or $\sin \hat{A} = h/b$ (triangle rectangle AIC) donc $h = b \sin(\hat{A})$

d'où

$$2S = bc \sin(\hat{A})$$

On en déduit que $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$... et on prouve de même que $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

soit

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

3) Notons $K = \frac{2S}{abc}$. Ainsi, $\sin \hat{A} = Ka$, $\sin \hat{B} = Kb$ et $\sin \hat{C} = Kc$

donc ABC rectangle en A $\Leftrightarrow BC^2 = BA^2 + AC^2$

$$\Leftrightarrow a^2 = c^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow K^2 a^2 = K^2 b^2 + K^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(\hat{A}) = \sin^2(\hat{B}) + \sin^2(\hat{C})$$

Ainsi

ABC rectangle en A ssi $\sin^2 \hat{A} = \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C}$

4) Attention, ça va être fin et délicat !

Bien entendu, $\sin^2(\hat{A}) = 1 - \cos^2(\hat{A})$ (relation fondamentale de la trigonométrie)

Or $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$ (question 1)

$$\text{donc } \cos^2(\hat{A}) = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} \quad \underbrace{-(b^2 + c^2 - 2bc)}$$

$$\text{d'où } \sin^2(\hat{A}) = 1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{4b^2c^2} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2} \quad \text{CQFD !}$$

5) Enfin $2S = bc \sin \hat{A}$ (question 2)

$$\text{d'où } S^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 \hat{A} = \frac{1}{16} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

$$\text{or } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ d'où } p-a = \frac{-a+b+c}{2}, p-b = \frac{a-b+c}{2} \text{ et } p-c = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\text{si bien que } S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \text{ soit } \boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Et voilà pour la formule de Héron (I^{er} siècle ap. J.C.)

EXO 12

On dispose du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et on cherche tous les vecteurs $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\text{Or, } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow ax + by = 0 \text{ (E) (avec } (a, b) \neq (0, 0) \text{)}$$

$$* \text{ Si } a=0 \text{ (E)} \Leftrightarrow by = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ (cf. } b \neq 0 \text{ puisque } (a, b) \neq (0, 0) \text{)}$$
$$\text{d'où } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

$$* \text{ Si } a \neq 0 \text{ (E)} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}y \Leftrightarrow \begin{cases} x = -bt \\ y = at \end{cases} \text{ en notant } t = \frac{y}{a} \in \mathbb{R}$$
$$\text{d'où } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} -bt \\ at \end{pmatrix} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Les solutions obtenues dans le cas $a=0$ étant de cette forme, on peut donc affirmer que dans tous les cas, les vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ sont tous les vecteurs de la forme

$$\boxed{\vec{v} \begin{pmatrix} -bt \\ at \end{pmatrix} \text{ avec } t \in \mathbb{R}}$$

EN PRATIQUE, ON RETIENDRA QUE $\vec{v} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ EST ORTHOGONAL À $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$... CE QUI EST PRATIQUE QUAND ON RECHERCHE UN VECTEUR NORMAL D'UNE DROITE

EXO 13

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (m-4)2m + (2m+1)(3-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 8m + 6m - 2m^2 + 3 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

$$\boxed{g = \{1\}}$$

$$\text{EN EFFET, POUR } m=1 \quad \vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EXO 14

Le même principe : $\vec{u}' \perp \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{u}' \cdot \vec{v}' = 0 \Leftrightarrow -3m - 2m + 10 = 0$
 $\Leftrightarrow 10 - 5m = 0 \Leftrightarrow m = 2$

$$\mathcal{Y} = \{2\}$$

EN EFFET, POUR $m=2$, $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}' \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

EXO 15

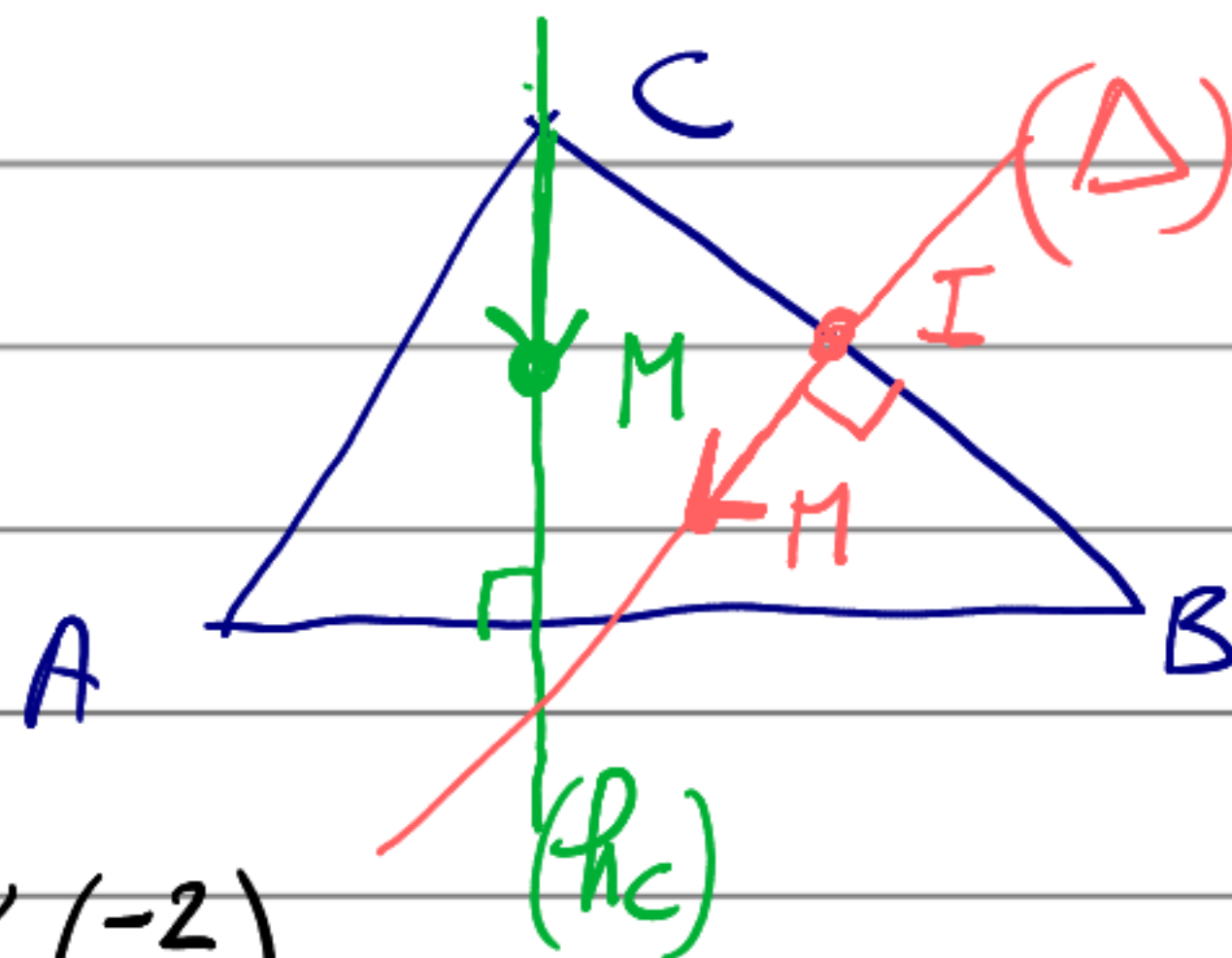
$\vec{BA}' \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC}' \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'où $BA = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{17}$ et $\vec{BA}' \cdot \vec{BC}' = -4 + 3 = -1$
 si bien que

(Angle quasiment droit,
un peu obtus)

$$\cos(\vec{BA}', \vec{BC}') = \frac{\vec{BA}' \cdot \vec{BC}'}{BA \times BC} = \frac{-1}{\sqrt{170}}$$

EXO 16

- Notons (h_c) la hauteur issue de C
 Alors $M \in (h_c) \Leftrightarrow \vec{CM}' \perp \vec{AB}'$
 $\Leftrightarrow \vec{CM}' \cdot \vec{AB}' = 0$



Pour $M(x; y)$, on a $\vec{CM}' \begin{pmatrix} x+5 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB}' \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

d'où $\vec{CM}' \cdot \vec{AB}' = -2(x+5) + 2(y+3) = 2(y+3-x-5) = 2(y-x-2)$

Ainsi, la droite (h_c) a pour équation

$$(h_c): y - x - 2 = 0$$

- Notons (Δ) la médiatrice du segment $[BC]$

$I = m[BC]$ a pour coordonnées $x_I = -3/2$ et $y_I = 0$

Alors $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{IM}' \perp \vec{BC}'$

$$\Leftrightarrow \vec{IM}' \cdot \vec{BC}' = 0$$

Pour $M(x; y)$, on a $\vec{IM}' \begin{pmatrix} x+3/2 \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{BC}' \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \end{pmatrix}$

d'où $\vec{IM}' \cdot \vec{BC}' = -7(x+3/2) - 6y = -(7x+6y+21/2)$

Ainsi, la droite (Δ) a pour équation

$$(\Delta): 7x + 6y + 21/2 = 0$$

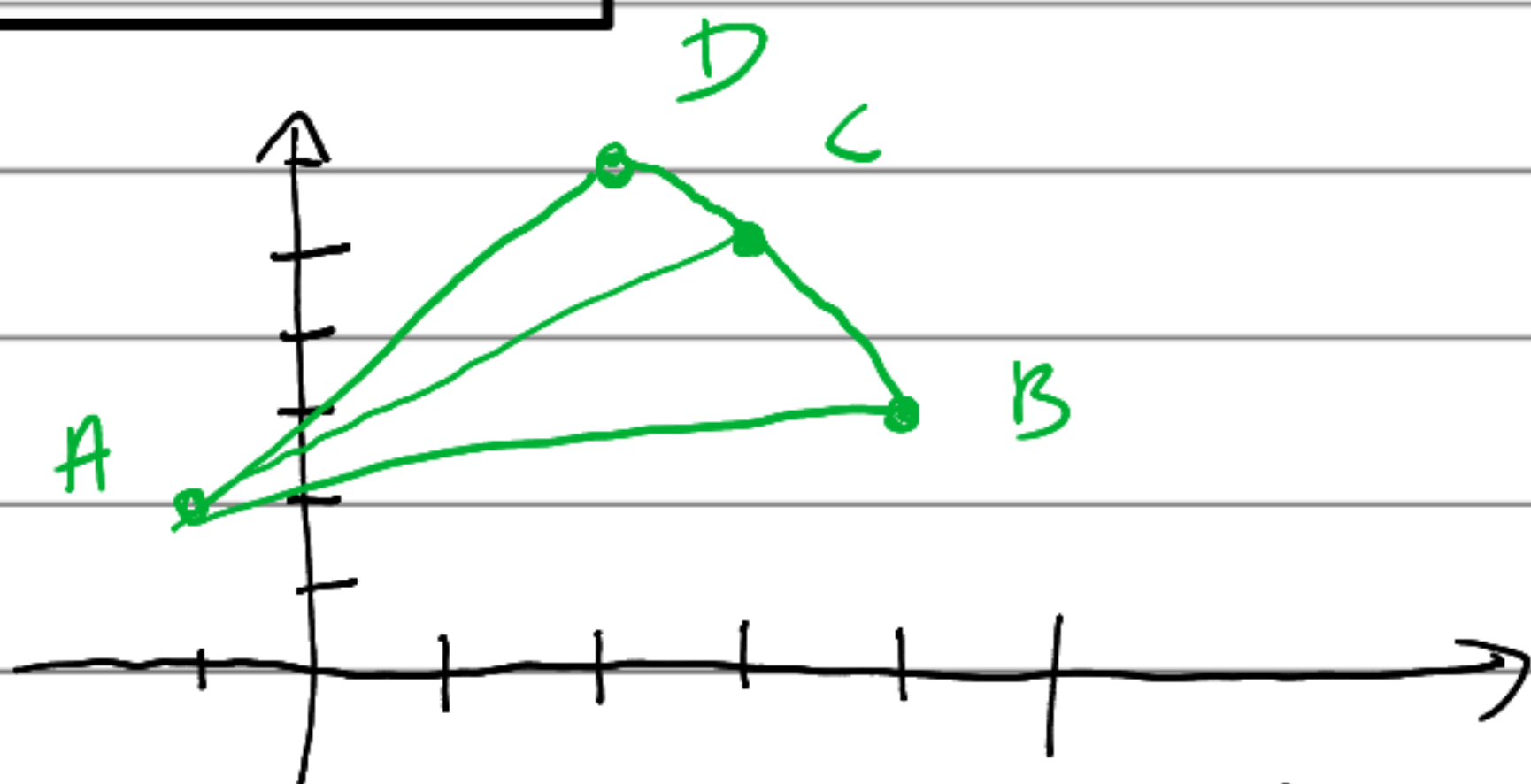
EXO 17

On reprend les calculs de l'exercice 15, en ajoutant $\det(\vec{BA'}, \vec{BC'}) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 13$
 De ce fait

$$\sin(\vec{BA'}, \vec{BC'}) = \frac{\det(\vec{BA'}, \vec{BC'})}{BA \times BC} = \frac{13}{\sqrt{170}}$$

EXO 18

Le schéma ci-dessous permet de voir que l'aire recherchée est : $A = A_{ABC} + A_{ACD}$



Trois vecteurs utiles : $\vec{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{AD} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| \quad \text{avec} \quad \det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 4 = 11$$

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} |\det(\vec{AC}, \vec{AD})| \quad \text{avec} \quad \det(\vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 9 = 7$$

De ce fait, $A = \frac{1}{2} (11 + 7) = 9$ (unités d'aire)

EXO 19

Soit $M \in P$. Notons (x, y) ses coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (α, β) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Ceci signifie que

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \quad (1)$$

En particulier, $\det(\vec{OM}, \vec{u}) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & \sqrt{3} \end{vmatrix} = x\sqrt{3} - y = \beta \det(\vec{v}, \vec{u}) = \beta \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -\beta(1 + \sqrt{3})$

et $\det(\vec{OM}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = x + y = \alpha \det(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = \alpha(1 + \sqrt{3})$

d'où $\alpha = \frac{x+y}{1+\sqrt{3}}$ et $\beta = \frac{-x\sqrt{3}+y}{1+\sqrt{3}}$

* EN EFFET, $\det(\vec{OM}, \vec{u}) = \det(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{u}) = \alpha\det(\vec{u}, \vec{u}) + \beta\det(\vec{v}, \vec{u}) = \beta\det(\vec{v}, \vec{u})$

On peut aussi résoudre le système linéaire (1) :

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \alpha\sqrt{3} + \beta = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1+\sqrt{3}) = x+y \\ \beta(1+\sqrt{3}) = y - x\sqrt{3} \end{cases} \begin{array}{l} (L1) + (L2) \\ (L2) - \sqrt{3}(L1) \end{array}$$

et on obtient la même chose !

EXO 20

- 1) Notons D_1 et D_2 les droites d'équations respectives $ax+by=e$ et $cx+dy=f$.
Le système (S) est le système vérifié par les coordonnées des points communs aux deux droites : il admet donc une unique solution si, et seulement si, celles-ci sont sécantes, c'est-à-dire si, et seulement si, leurs vecteurs normaux $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

Cette condition équivaut à $\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$
soit encore $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Ainsi, le système (S) admet une unique solution si, et seulement si, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

- 2) Dans ce cas, considérons la solution (x, y) du système (S) et notons $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Alors (S) $\Leftrightarrow x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$
si bien que $\det(\vec{w}, \vec{v}) = x \det(\vec{u}, \vec{v}) + y \det(\vec{v}, \vec{v}) = x \det(\vec{u}, \vec{v})$
et $\det(\vec{u}, \vec{w}) = x \det(\vec{u}, \vec{u}) + y \det(\vec{u}, \vec{v}) = y \det(\vec{u}, \vec{v})$
Comme $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, il en découle que

$$x = \det(\vec{w}, \vec{v}) \div \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\text{et } y = \det(\vec{u}, \vec{w}) \div \det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Ce sont les **FORMULES DE CRAMER**, qui permettent de résoudre directement les systèmes linéaires 2×2

3) Utilisons les résultats des questions 1) et 2)

* $\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$ donc le système linéaire propre admet une unique solution d'après la question 1)

* Celle-ci vérifie $x = \begin{vmatrix} a & \sin \theta \\ b & \cos \theta \end{vmatrix} = \underline{a \cos(\theta) - b \sin(\theta)}$

et $y = \begin{vmatrix} \cos \theta & a \\ -\sin \theta & b \end{vmatrix} = \underline{b \cos(\theta) + a \sin(\theta)}$

EXO 21

• $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc elle admet $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal; de ce fait, elle a une équation de la forme $2x + 3y + c = 0$

Or $A \in \mathcal{D}$ donc $2x^2 + 3x1 + c = 0$ soit $c = -7$

Ainsi, la droite $\mathcal{D}$ a pour équation

$$\boxed{2x + 3y - 7 = 0}$$

• AUTRE MÉTHODE

Pour $M(x; y)$, on a $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}'$ colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}') = 0$

Or $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ y-1 & -2 \end{vmatrix} = -2(x-2) - 3(y-1) = -2x - 3y + 7$

si bien que $\mathcal{D}$ admet pour équation

$$\boxed{-2x - 3y + 7 = 0}$$

EXO 22

Il faut résoudre l'équation afin de faire apparaître la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$. Pour $M(x, y) \in \mathcal{P}$, on a

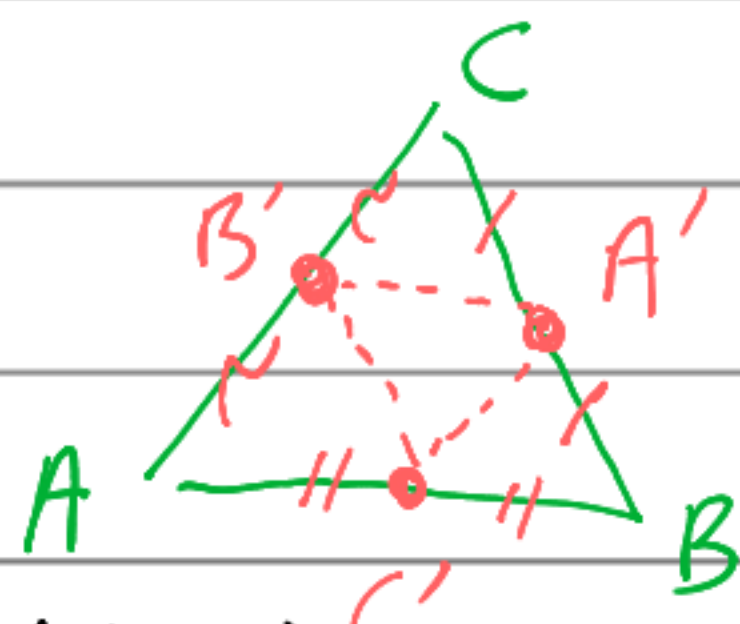
$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 4x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 4x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 1x \\ y = 3 - 4x \end{cases} \text{ avec } x \in \mathbb{R}$$

Par conséquent, la droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A(0; 3)$ et est dirigée par $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

VÉRIFICATION $\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont bien orthogonaux

EXO 23

- 1) Dans ce repère, $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$
Notons A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Alors $A'(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, $B'(0;\frac{1}{2})$ et $C'(\frac{1}{2};0)$



Equation de (AA')

Comme $A(0;0)$ et $A'(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, l'équation est évidemment $x=y$ soit $x-y=0$

Equation de (BB')

C'est $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BB'}) = 0$ avec $M(x;y) \in \mathcal{P}$
Or $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BB'} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ donc $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BB'}) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{x-1}{2} + y$
donc $\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BB'}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} + y = 0 \Leftrightarrow x+2y=1$

Equation de (CC')

Cette droite a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CC'} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Elle possède ainsi une équation de la forme $2x+y+c=0$
Enfin, $C \in (CC')$ donc $2 \times 0 + 1 + c = 0$ soit $c = -1$.
Ainsi, (CC') admet pour équation $2x+y=1$

- 2) Cherchons s'il existe un point $M(x,y)$ appartenant à ces 3 droites. C'est le cas si, et seulement si,

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y=1 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3y=1 \\ 3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1/3 \\ y=1/3 \\ 1=1 \end{cases} \leftarrow \text{ok!}$$

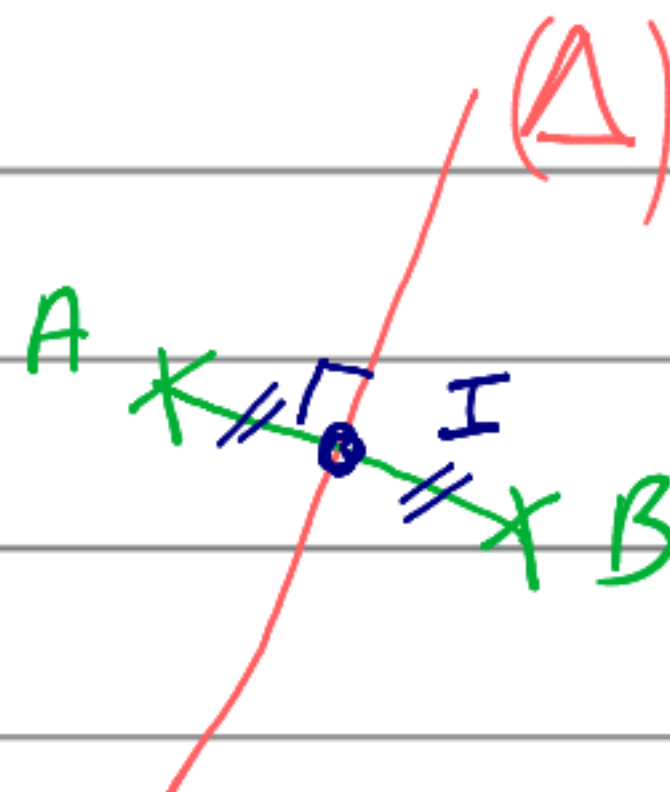
Ceci montre que les trois médianes du triangle se coupent au point $G(1/3; 1/3)$

GRÂCE À CET EXERCICE, ON SAIT LOCALISER LE POINT G!

EXO 24

Notons Δ cette médiatrice

- * Elle passe par $I = m[AB]$, de coordonnées $(1; 3/2)$
- * Elle a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \end{pmatrix}$



De ce fait, elle admet une équation de la forme $-8x - y + c = 0$

Enfin, $I \in (\Delta)$ donc $8 - 3/2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -13/2$

Ainsi, (Δ) a pour équation $-8x - y - \frac{13}{2} = 0$ d'où $\boxed{16x + 2y + 13 = 0}$

EXO 25

- * La droite D a pour équation $2x + 5y - 10 = 0$

La droite D' passe par $A(-1; 2)$ et est dirigée par $\vec{u}' \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$: elle admet donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

- * De ce fait, les coordonnées $(x; y)$ de leur intersection vérifient

$$\begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ 2x + 5y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ -2 + 6\lambda + 10 + 10\lambda - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/8 \\ x = -1 + 3/8 = -5/8 \\ y = 2 + 2/8 = 18/8 = 9/4 \end{cases}$$

Ainsi, les droites D et D' se coupent en $\boxed{I(-\frac{5}{8}; \frac{9}{4})}$

AUTRE MÉTHODE

La droite D' admet pour vecteur normal $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$: elle a donc une équation de la forme $2x - 3y + c = 0$

Or $A \in D'$ donc $-2 - 6 + c = 0$ soit $c = 8$: ainsi, $D' : 2x - 3y + 8 = 0$

Les coordonnées $(x; y)$ de l'intersection de D et D' vérifient alors

$$\begin{cases} 2x + 5y - 10 = 0 \\ 2x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y - 10 = 0 \\ -8y + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 18/8 = 9/4 \\ x = 5 - \frac{5}{2}y = 5 - \frac{45}{8} = -5/8 \end{cases}$$

EXO 26

1) (AB) est dirigée par $\vec{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc elle admet $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Ainsi, son équation est de la forme $2x - 7y + c = 0$

Or $A \in (AB)$ donc $-8 + 7 + c = 0$ soit $c = 1$: de ce fait, $(AB) : 2x - 7y + 1 = 0$

• D_2 est dirigée par $\vec{t}' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc elle admet $\vec{n}'_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal et son équation est de la forme $2x - y + c' = 0$

Or $C \in D_2$ donc $-4 - 3 + c' = 0$ soit $c' = 7$: de ce fait, $D_2 : 2x - y + 7 = 0$

2) Les coordonnées (x, y) de leur point d'intersection D vérifient

$$\begin{cases} 2x - 7y = -1 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -7 & (L_2) \\ -6y = 6 & (L_1) - (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (y - 7)/2 = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ciel ! Les deux droites se coupent en A !

$$D = A$$

EFFECTIVEMENT $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $\vec{AC} = 2\vec{t}$

3) (AE) est dirigée par $\vec{AE} \begin{pmatrix} 20 \\ 65 \end{pmatrix}$ donc admet pour vecteur normal $\vec{n}'_3 \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ainsi, son équation est de la forme $13x - 4y + d = 0$. Or, $A \in (AE)$ donc $-52 + 4 + d = 0$ soit $d = 48$

Ainsi, (AE) a pour équation $13x - 4y + 48 = 0$

EXO 27

Les vecteurs normaux de ces deux droites, $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$, ne sont pas colinéaires donc elles ne sont pas parallèles. Par double négation, elles sont donc sécantes, c'est-à-dire concourantes.

Leurs bissectrices sont constituées des points équidistants des deux droites. Or, pour $M(x, y)$ un point du plan, on a

$$d(M, D) = \frac{|3x + 4y + 3|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3x + 4y + 3|}{5}$$

$$\text{et } d(M, D') = \frac{|12x - 5y + 4|}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{|12x - 5y + 4|}{13}$$

$$\text{donc } d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}') \Leftrightarrow \frac{|3x+4y+3|}{5} = \frac{|12x-5y+4|}{13}$$

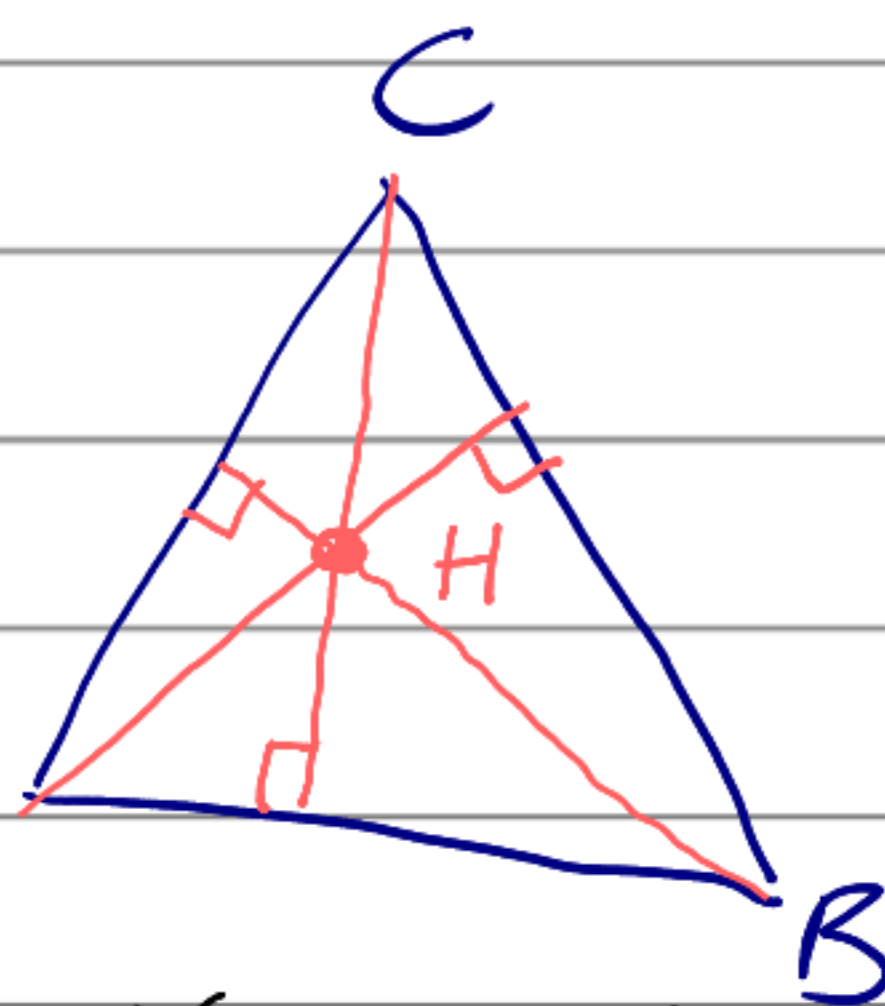
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 13|3x+4y+3| = 5|12x-5y+4| \\ &\Leftrightarrow 13^2(3x+4y+3)^2 = 5^2(12x-5y+4)^2 \\ &\Leftrightarrow (39x+52y+39)^2 - (60x-25y+20)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (99x+27y+59)(-21x+77y+19) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{99x+27y+59=0} \quad \text{ou} \quad \boxed{-21x+77y+19=0} \end{aligned}$$

Voici les équations des deux bissectrices demandées

EXO 28

ORTHOCENTRE

Notons $H(x; y)$ l'orthocentre de ABC
 Alors $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$
 soit $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
 Or $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} x-4 \\ y+4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} x-10 \\ y-8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} x+8 \\ y-8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

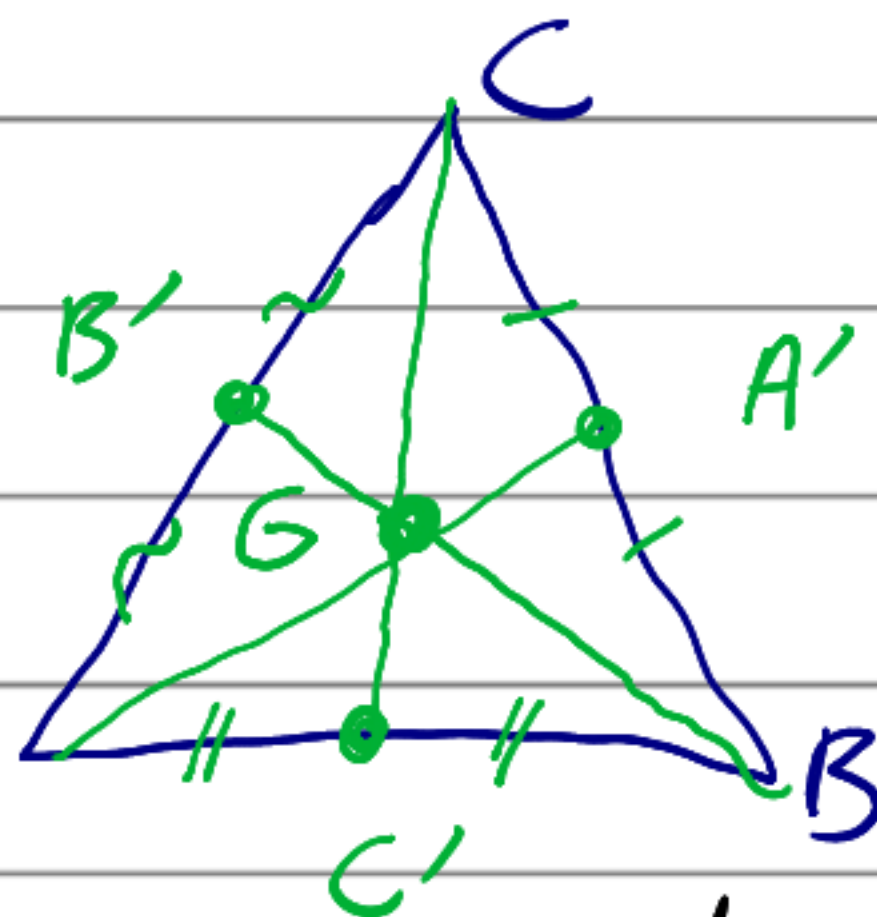


$$\text{On a donc } \begin{cases} -18(x-4) = 0 \\ -12(x-10) + 12(y-8) = 0 \\ 6(x+8) + 12(y-8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 0 \\ y-8-x+10 = 0 \\ 2y-16+x+8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=x+8-10=2 \\ 0=0 \quad \text{OK!} \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{H(4; 2)}$

CENTRE DE GRAVITE

Notons $G(x; y)$ le centre de gravité du triangle A
 G est l'intersection des 3 médianes (AA') , (BB') et (CC') (on note A' , B' et C' les milieux des trois côtés du triangle)
 donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$, $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BB'} = 0$ et $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CC'} = 0$



Calculons les coordonnées des milieux

De ce fait $A'(1;8)$ $B'(-2;2)$ $C'(7;2)$

$$\det(\overrightarrow{AG'}, \overrightarrow{AA'}) = \begin{vmatrix} x-4 & -3 \\ y+4 & 12 \end{vmatrix} = 12(x-4) + 3(y+4) \\ = 3(4x-16+y+4) \\ = 3(4x+y-12)$$

$$\det(\overrightarrow{BG'}, \overrightarrow{BB'}) = \begin{vmatrix} x-10 & -12 \\ y-8 & -6 \end{vmatrix} = -6(x-10) + 12(y-8) \\ = 6(10-x+2y-16) \\ = 6(2y-x-6)$$

$$\det(\overrightarrow{CG'}, \overrightarrow{CC'}) = \begin{vmatrix} x+8 & 15 \\ y-8 & -6 \end{vmatrix} = -6(x+8) - 15(y-8) \\ = 3(-2x-16-5y+40) \\ = 3(5y+2x-24)$$

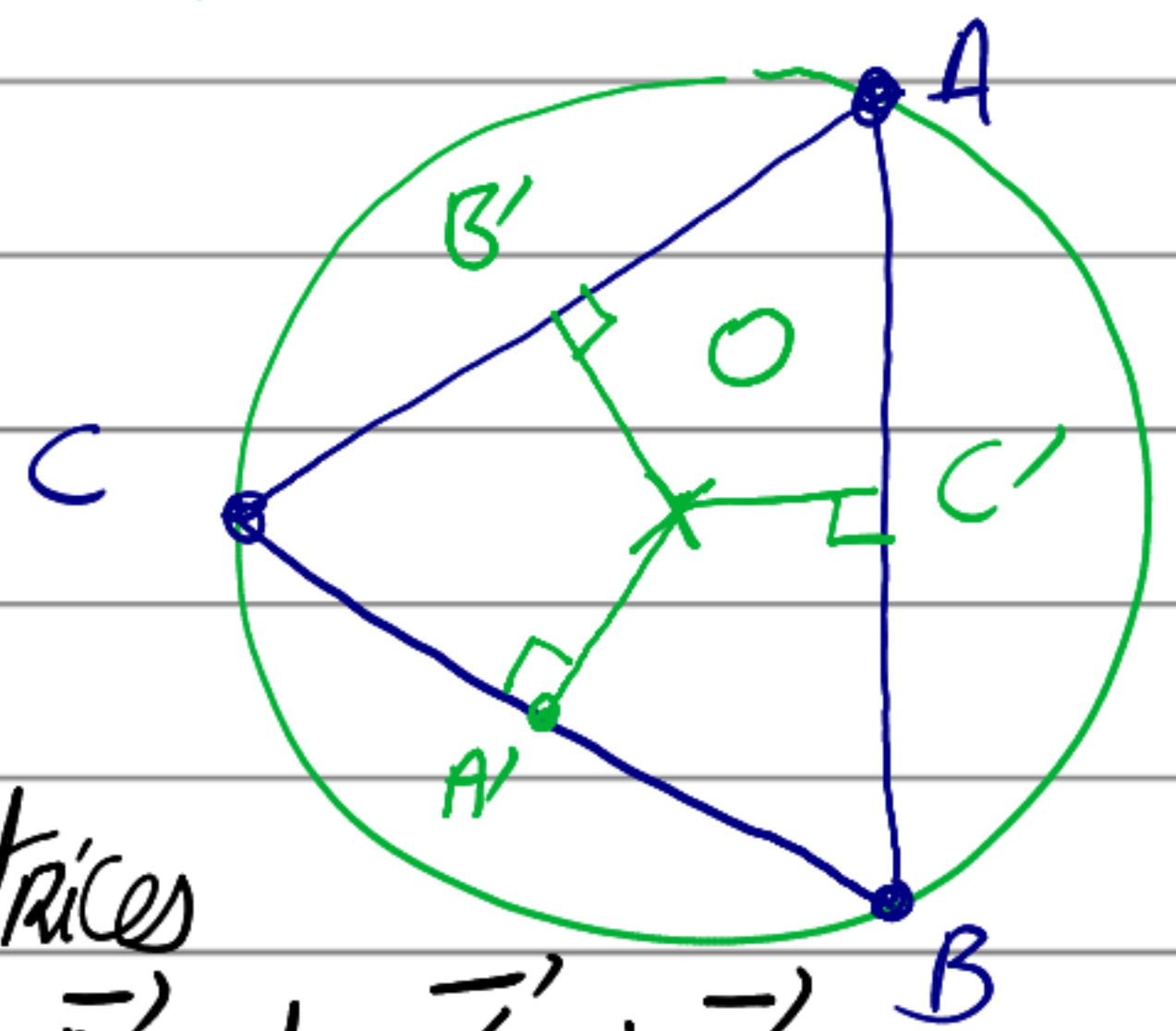
Ainsi $\begin{cases} y+4x=12 \\ 2y-x=6 \\ 5y+2x=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+4x=12 \\ -9x=-18 & (2)-2(1) \\ -18x=-36 & (3)-5(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12-4x=4 \\ x=2 \\ x=2 \quad (\text{ok!}) \end{cases}$

De ce fait, $G(2;4)$

CENTRE DU CERCLE CIRCONSCRIT

Notons $O(x;y)$ le centre du cercle circonscrit du triangle ABC . Alors O appartient aux médiatrices de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ donc $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BO} \perp \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CO} \perp \overrightarrow{AB}$
soit $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
or $\overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BO} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CO} \begin{pmatrix} x-7 \\ y-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

TSVP $\Rightarrow$



On a donc $\begin{cases} -18(x-1)=0 \\ -12(x+2)+12(y-2)=0 \\ 6(x-7)+12(y-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y-2-x-2=0 \\ x-7+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=x+4=5 \\ 0=0 \end{cases} \quad (\text{ok!})$

Ainsi $\boxed{O(1;5)}$ de fait $\vec{OG}(1; -1)$ et $\vec{OH}(3; -3)$ donc $\boxed{\vec{OH}=3\vec{OG}}$

EXO 29

$$\begin{cases} x^2+y^2-6y+4=0 \\ x^2+y^2+x-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x-3y=0 \quad (L2) \\ -x-3y+4=0 \quad (L1)-(L2) \end{cases}$$

On déduit de la 2^{ème} équation que $x=4-3y$. On injecte ceci dans la 1^{ère} équation:

$$\begin{aligned} (4-3y)^2+y^2-6y+4 &= 0 \Leftrightarrow 16-24y+9y^2+y^2-6y+4=0 \\ &\Leftrightarrow 10y^2-30y+20=0 \\ &\Leftrightarrow y^2-3y+2=0 \\ &\Leftrightarrow y=1 \text{ ou } y=2 \quad (\text{racines évidentes}) \end{aligned}$$

Pour $y=1$, on obtient $x=1$. Et pour $y=2$, il vient $x=-2$.

Ainsi, les deux points d'intersection des deux cercles sont $\boxed{A(1;1) \text{ et } B(-2;2)}$

EXO 30

1) C'est $\boxed{(x+2)^2+(y-1)^2=5}$ tout bêtement (pas besoin de développer)

$$\begin{aligned} 2) \quad 2x^2+2y^2-12x+4y+8=k &\Leftrightarrow x^2-6x+y^2+2y+4=k/2 \\ &\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+2y+1+4=k/2+10 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=\frac{k}{2}+6=\frac{k+12}{2} \end{aligned}$$

Pour $k \geq -12$, on tombe sur l'équation du cercle de centre $\boxed{C(3;-1)}$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{k+12}}{2}$.

Pour $k=6$, $\boxed{R=3}$ et pour $k=-4$, $\boxed{R=2}$

EXO 31

$$1) \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 4 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 = 3^2$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $C(2; -1)$ et de rayon 3

$$2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3y \\ (2 - 3y)^2 + y^2 - 4(2 - 3y) + 2y = 4 \quad (E) \end{cases}$$

$$(E) \Leftrightarrow 4 - 12y + 9y^2 + y^2 - 8 + 12y + 2y = 4$$

$$\Leftrightarrow 10y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y^2 + y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \text{ (racine évidente)} \text{ ou } y = 4/5 \text{ (produit des racines)}$$

$$\text{Pour } y = -1, \quad x = 5 \quad \text{et pour } y = 4/5, \quad x = 2 - 12/5 = -2/5$$

Ainsi, $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{A; B\}$ avec $A(5; -1)$ et $B(-2/5; 4/5)$

EXO 32

• Introduisons $I = M[AB]$. Alors $\begin{cases} \overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{MI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{MI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{cases}$

$$\text{donc } \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{MB'} = MI^2 - AB^2/4$$

$$\text{De ce fait, } \overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{MB'} = R \Leftrightarrow MI^2 = R + AB^2/4$$

• Si $R < -AB^2/4$, l'ensemble recherché est $\emptyset$

Si $R \geq -AB^2/4$, c'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{R + AB^2/4}$

EXO 33

$$3x - 2y + z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = -5 - 3x + 2y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 1x + 0y \\ y = 0 + 0x + 1y \\ z = -5 - 3x + 2y \end{cases} \text{ avec } x \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

On reconnaît le plan passant par $A(0; 0; -5)$ et dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

EXO 34

Les deux plans admettent pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.
 Ils sont perpendiculaires si $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{aa' + bb' + cc' = 0}$ CQFD

EXO 35

Les deux plans ont pour vecteurs normaux $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'angle entre ces plans est ainsi $\theta = (\vec{n}_1, \vec{n}_2)$, qui est caractérisé par

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \times \|\vec{n}_2\|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{18}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \text{ soit } \boxed{\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}}$$

EXO 36

1) P: $2x + 6y - z - 7 = 0$ et A(3, -1, 2) donc la distance de A à P est
 $d(A, P) = \frac{|2 \times 3 + 6 \times (-1) - 2 - 7|}{\sqrt{2^2 + 6^2 + (-1)^2}} = \frac{9}{\sqrt{41}}$

2) Commençons par trouver une équation de P. Son vecteur normal $\vec{n}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifie
 $\begin{cases} \vec{n}' \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n}' \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 0 \quad (L_2) \\ -5x - 4y = 0 \quad (L_1) - 2(L_2) \end{cases}$
 Prenons $x = 4$: alors $y = -5x/4 = -5$ et $z = y - 3x = -17$
 Ainsi $\vec{n}' \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -17 \end{pmatrix}$ convient. De ce fait, P admet une équation de la forme

P: $4x - 5y - 17z + c = 0$. Or B(-2, 1, 0) donc $-8 - 5 + c = 0$ soit $c = 13$
 De ce fait, P: $4x - 5y - 17z + 13 = 0$
 La distance du point A(4, 2, -3) au plan P est donc

$$d(A, P) = \frac{|4 - 5 \times 2 - 17 \times (-3) + 13|}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 17^2}} = \frac{50}{\sqrt{16 + 25 + 289}} = \frac{50}{\sqrt{330}}$$

EXO 37

Pour déterminer l'angle entre les droites, il faut d'abord trouver leurs vecteurs directeurs. Il suffit pour cela de résoudre les systèmes d'équations afin de faire apparaître les représentations paramétriques des deux droites.

* DROITE D

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3x \\ z = 2y - x = 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 1x \\ y = 0 + 3x \\ z = 0 + 5x \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(L2 ← L2 + L1)

La droite D passe par le point O(0;0;0) et est dirigée par $\vec{u}(1;3;5)$

* DROITE D'

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z = -4z \\ y = 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + (-4)z \\ y = 0 + 3z \\ z = 0 + 1z \end{cases}$$

(L2 ← L2 - 2L1)

La droite D' passe par le point O(0;0;0) et est dirigée par $\vec{u}'(-4;3;1)$

* CALCUL DE L'ANGLE

Notons θ l'angle entre D et D'. Il est caractérisé par $\theta = (\vec{u}, \vec{u}')$ d'où

$$\cos(\theta) = \cos(\vec{u}, \vec{u}') = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{u}'\|} = \frac{10}{\sqrt{35} \times \sqrt{26}} = \sqrt{\frac{10 \times 10}{7 \times 5 \times 2 \times 13}} = \sqrt{\frac{10}{91}}$$

Et ainsi, l'angle θ entre D et D' est caractérisé par

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{10}{91}} \approx \frac{1}{3}$$

EXO 38

Commençons par un pli de dessin afin de voir comment calculer la distance $d(A, D)$ en connaissant un point et un vecteur de la droite D.

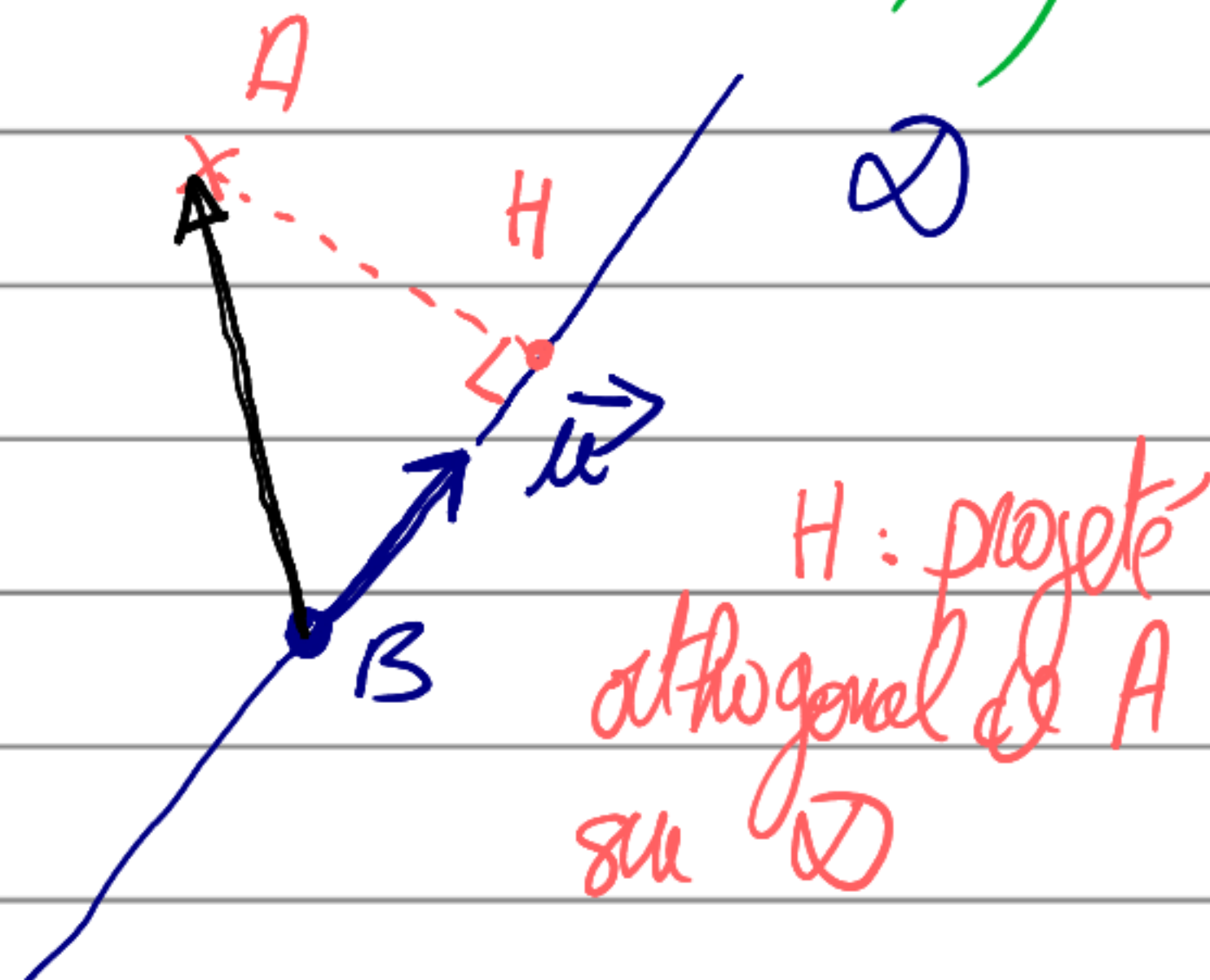
Sur le dessin, cette distance est AH, norme de $\vec{AH}$

Or $\vec{BA} = \vec{BH} + \vec{HA}$ donc $\vec{BA} \cdot \vec{u} = \vec{BH} \cdot \vec{u} + \vec{HA} \cdot \vec{u}$

Comme $\vec{u} \perp \vec{HA}$, alors $\vec{HA} \cdot \vec{u} = 0$.

De plus, $H \in D$ donc $\vec{BH} = \lambda \vec{u}$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$)

d'où $\vec{BH} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{u} = \lambda \|\vec{u}\|^2$



Ainsi, $\vec{H} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ donc $\vec{BH} = \frac{(\vec{BA} \cdot \vec{u}) \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$ si bien que

$$d(A, \mathcal{D}) = HA = \|\vec{HA}\| = \|\vec{BA} - \vec{BH}\| = \left\| \vec{BA} - \frac{(\vec{BA} \cdot \vec{u}) \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \right\|$$

1) 1^{ère} droite

$$\vec{BA} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \|\vec{u}\|^2 = 4 + 1 + 9 = 14$$

$$\text{et } \vec{BA} \cdot \vec{u} = 6 + 3 + 9 = 18$$

↳ formule magique une au cours...
et à savoir retrouver "à la main"

$$\text{Ainsi, } \vec{HA} = \vec{BA} - \frac{9}{7} \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18/7 \\ -9/7 \\ 27/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 \\ -12/7 \\ -6/7 \end{pmatrix} = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

VÉRIFICATION

$$\vec{HA} \cdot \vec{u} = 0$$

donc $\vec{HA} \perp \vec{u}$

$$\text{donc } HA = \frac{3}{7} \times \sqrt{1 + 16 + 4} = \frac{3\sqrt{21}}{7} \quad \text{soit } d(A, \mathcal{D}) = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

2) 2^{ème} droite

$$\mathcal{D} \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z + 1 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2z \\ y = 1 + 3z \\ z = 0 + 1z \end{cases} \quad \text{passe par } B(-1; 1; 0) \text{ et est dirigée par } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } \vec{BA} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \|\vec{u}\|^2 = 4 + 9 + 1 = 14 \text{ puis } \vec{BA} \cdot \vec{u} = 6 - 6 + 1 = 1$$

VÉRIFICATION

$$\text{donc } \vec{HA} = \vec{BA} - \frac{1}{14} \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/7 \\ 3/14 \\ 1/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/14 \\ -31/14 \\ 13/14 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 40 \\ -31 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\vec{HA} \cdot \vec{u} = 0$$

donc $\vec{HA} \perp \vec{u}$

$$\text{si bien que } HA = \frac{1}{14} \times \sqrt{1600 + 961 + 169} = \frac{\sqrt{2730}}{14} \quad \text{soit } d(A, \mathcal{D}) = \frac{\sqrt{2730}}{14}$$

Bon, on peut voir que $2730 = 273 \times 10 = 3 \times 91 \times 10 = 3 \times 7 \times 13 \times 10 \dots$
mais cela ne nous apporte pas à grand chose!

EXO 30

Cette droite a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + 2\lambda \\ z = c + 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
en notant $A(a; b; c)$ un de ces points.

Puisqu'elle rencontre les deux droites, cela signifie que les systèmes

$$(S') \begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + 2\lambda \\ z = c + 3\lambda \\ x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S) \begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + 2\lambda \\ z = c + 3\lambda \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

sont tous les deux compatibles (mais donnent évidemment deux valeurs différentes de λ)

1^{er} système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \lambda = 0 \\ y = b + 2\lambda \\ z = c + 3\lambda = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -a \\ x = 0 \\ y = b - 2a \\ z = 1 \\ c - 3a = 1 \end{cases}$$

donc ce système est compatible si, et seulement si,

$$\boxed{c - 3a = 1}$$

2nd système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \lambda = 1 \\ y = b + 2\lambda = 0 \\ z = c + 3\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - a \\ x = 1 \\ y = 0 \\ b + 2(1 - a) = 0 \\ z = c + 3(1 - a) \end{cases}$$

donc ce système est compatible si, et seulement si,

$$\boxed{b + 2 - 2a = 0}$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} c - 3a = 1 \\ b + 2 - 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 2a - 2 \\ c = 3a + 1 \end{cases} \quad \text{et pour } a = 0, \text{ on obtient } b = -2 \text{ et } c = 1$$

Ainsi, la droite recherchée est la droite passant par $A(0; -2; 1)$ et dirigée par $\vec{t} \left(\frac{1}{3} \right)$

REMARQUE c'est la droite qui apparaît lors de la résolution du dernier système puisque

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = 2a - 2 \\ c = 3a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 + 1a \\ b = -2 + 2a \\ c = 1 + 3a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

EXO 40

Cette droite a pour représentation paramétrique
 en notant $\vec{u}(a; b; c)$ un de ses vecteurs directeurs.

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 1 + \lambda b \\ z = 2 + \lambda c \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Puisqu'elle rencontre les deux autres droites, cela signifie que les deux systèmes

$$(S) \begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 1 + \lambda b \\ z = 2 + \lambda c \\ z = 0 \\ 2x = 3y \end{cases} \quad \text{et} \quad (S') \begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 1 + \lambda b \\ z = 2 + \lambda c \\ y = 0 \\ x = 2z \end{cases}$$

sont compatibles (mais pour des valeurs de λ pas obligatoirement identiques)

1^{er} système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 1 + \lambda b \\ z = 2 + \lambda c = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2/c \\ x = 1 - 2a/c \\ y = 1 - 2b/c \\ z = 0 \\ 2 - 4a/c - 3 + 6b/c = 0 \end{cases}$$

donc ce système est compatible si, et seulement si, on a

$$\boxed{-4a + 6b - c = 0}$$

2nd système

$$(S') \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda a \\ y = 1 + \lambda b = 0 \\ z = 2 + \lambda c \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1/b \\ x = 1 - a/b \\ y = 0 \\ z = 2 - c/b \\ 1 - a/b - 4 + 2c/b = 0 \end{cases}$$

donc ce système est compatible si, et seulement si, on a

$$\boxed{-a - 3b + 2c = 0}$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} 4a - 6b + c = 0 \\ a + 3b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b - 2c = 0 \quad (L2) \\ 6a - 3c = 0 \quad (L1) + 2(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2a \\ 3b - 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b = a \\ c = 2a \end{cases}$$

et pour $a=1$, on obtient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. C'est un peu spécial car la droite recherchée est
 la droite passant par $O(0;0;0)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$...

si bien que les trois droites considérées se coupent au point $O(0;0;0)$