CHAPITRE 18 — Exos 1 à 15

EXO 1

1) Comme $|x|+1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$ symétrique par rapport à 0.
De plus, $f(-x) = \dfrac{-x}{|-x|+1} = \dfrac{-x}{|x|+1} = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

AINSI $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est IMPAIRE}}$ … sa courbe est symétrique par rapport à l'origine

2) • Étudions ses variations sur $]0,+\infty[$.
Pour tout $x>0$, on a $f(x) = \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1-1}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ donc f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$
Ainsi $f \nearrow$ sur $]0,+\infty[$

• Enfin $f(0)=0$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \sim 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (expression valable pour $x>0$)

• On complète le tableau de variations par symétrie centrale

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Notons que comme f est impaire, sa dérivée f' (définie uniquement sur $\mathbb{R}^*$) est paire

3) On reconnaît clairement le tableau de variations d'une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$
Retrouvons-le par le calcul. Pour $y \in]-1;1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = y \iff \frac{x}{|x|+1} = y$$ … ce qui montre au passage que x et y sont de même signe

• Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$: $f(x) = y \iff \dfrac{x}{1+x} = y \iff x = y + xy \iff x - xy = y \iff x = \dfrac{y}{1-y}$

• Si $x<0$ et $y \leq 0$: $f(x) = y \iff \dfrac{x}{1-x} = y \iff x = y - xy \iff x + xy = y \iff x = \dfrac{y}{1+y} = \dfrac{y}{1-|y|}$

AINSI tout réel $y \in]-1;1[$ admet pour unique antécédent le réel $x = \dfrac{y}{1-|y|}$
Ceci montre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ et que sa bijection réciproque est l'application

$$\boxed{f^{-1} : \begin{array}{l}]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \dfrac{y}{1-|y|} \end{array}}$$

EXO2

1) Par définition, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ d'où $\lfloor x \rfloor - 1 \leq x - 1 < \lfloor x \rfloor$
et donc $\boxed{x-1 < \lfloor x \rfloor \leq \lfloor x \rfloor}$

2) Comme $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, alors $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x+1 < (\lfloor x \rfloor + 1) + 1$
avec $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$. Par définition et unicité de la partie entière,
on en déduit que $\boxed{\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1}$

3) On a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$
donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$
si bien que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \longrightarrow \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
ou $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \leq x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \longrightarrow \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$
On a donc $\boxed{\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \text{ ou } \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1}$

EXO3

1) Pour $x \in]0, a[$, $0 < \frac{x}{a} < 1$ donc $\lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0$ et $\frac{b}{x} \lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0$
Ainsi, $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{b}{x} \lfloor \frac{x}{a} \rfloor = 0}$

2) Pour tout $x > 0$, $\frac{b}{x} - 1 < \lfloor \frac{b}{x} \rfloor \leq \frac{b}{x}$ (cf. exercice 2 question 1)

donc $\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor \leq \frac{b}{a}$
Comme $\lim_{x \to 0} \frac{x}{a} = 0$, on déduit du théorème des Gendarmes que $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a} \lfloor \frac{b}{x} \rfloor = \frac{b}{a}}$

EXO4

$A = \ln(e^{3/2}) + \sqrt{3} = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$ $\qquad B = \ln(e^{1/4}) = \frac{1}{4}$

$C = e^{-2\ln(2)} = e^{\ln(2^{-2})} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ $\qquad D = e^{-2\ln 2} = C = \frac{1}{4}$

L'intrus est le nombre $\boxed{A}$

EXO5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > x^2$ donc $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = \max(x, -x)$

d'où $x + \sqrt{x^2+1} > |x| + x \geqslant 0$ puisque $|x| \geqslant -x$

et $\sqrt{x^2+1} - x > |x| - x \geqslant 0$ puisque $|x| \geqslant x$

De ce fait, l'expression proposée est bien définie et l'on a

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right) = \ln\left(x^2+1-x^2\right) = \ln(1) = 0$$

CQFD !

EXO6

1) • $1-3x > 0 \iff 1 > 3x \iff x < 1/3$

Pour $x \in]-\infty; 1/3[$, on a $\ln(1-3x) = 2 \iff 1-3x = e^2 \iff 3x = 1-e^2$

$\iff x = \dfrac{1-e^2}{3}$

AINSI $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1-e^2}{3}\right\}}$

• $x^2-9 > 0 \iff x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$ cf. tableau de signes de x^2-9

$x > 0 \iff x \in]0; +\infty[$

De ce fait, l'équation est définie sur $]3; +\infty[$

Pour $x > 3$, on a $\ln(x^2-9) = \ln(x) \iff x^2-9 = x \iff x^2-x-9 = 0$

$\Delta = 1+36 = 37$ racines : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{37}}{2} < 0$ & $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{37}}{2} > \dfrac{\sqrt{36}}{2} = 3$

NE CONVIENT PAS ! CONVIENT !

AINSI $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\right\}}$

2) Cette inéquation est définie pour $x+1 \neq 0$ et $2x+1 \neq 0$ soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -1/2\}$

Pour un tel réel x, $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln(2) \iff |x+1| \leqslant 2|2x+1| = |4x+2|$

$\iff (4x+2)^2 - (x+1)^2 \geqslant 0$

$\iff (4x+2+x+1)(4x+2-x-1) \geqslant 0$

$\iff (5x+3)(3x+1) \geqslant 0$

$-\infty$	-1	$-3/5$	$-1/2$	$-1/3$	$+\infty$
$+$	‖ $+$	0 $-$	‖ $-$	0 $+$	

$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup]-1; -3/5[\cup]-1/3; +\infty[}$

EXO 7

CROISSANCES COMPARÉES

(a) $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ donc $\ln(x)-x^2 \underset{+\infty}{\sim} -x^2$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-x^2\right)=-\infty}$

(b)
$$\begin{array}{rl|l}
x^3 & -8 & x-2 \\ \cline{3-3}
-(x^3-2x^2) & & x^2+2x+4 \\ \cline{1-1}
2x^2 & -8 & \\
-(2x^2-4x) & & \\ \cline{1-1}
4x-8 & & \\ \cline{1-1}
0 & &
\end{array}$$

AINSI $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

d'où $(x-2)^2\ln(x^3-8)$
$$= (x-2)^2\ln(x-2) + (x-2)^2\ln(x^2+2x+4) \text{ pour } x>2$$

- Or $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$ et $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x^2+2x+4)=\ln(12)$ par continuité de $\ln$

donc $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2\ln(x^2+2x+4)=0$ par produit

- Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+}X^2\ln X=0$ par CROISSANCES COMPARÉES

donc $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^2\ln(x-2)=0$ par composition

d'où par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)^2\ln(x^3-8)=0}$

(c) Pour $x>0$, on a : $\ln(1+x)=\ln\left(x\left(1+1/x\right)\right)=\ln x+\ln(1+1/x)$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}1/x=0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+1/x)=\ln 1=0$ par somme et composition

Or $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x)=-\infty$ donc $\ln(1+1/x)=o(\ln x)$ et $\ln(x)+\ln(1+1/x)\underset{+\infty}{\sim}\ln(x)$

AINSI $\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\ln(x)}{x^3}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^3}=0$ par croissances comparées

d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}=0}$

(d) Comme $\ln(1+u)\underset{u\to 0}{\sim}u$, on a $\ln(1+2x)\underset{0}{\sim}2x$ et $\ln(1-4x)\underset{0}{\sim}-4x$

d'où $\dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1-4x)}\underset{0}{\sim}\dfrac{2x}{-4x}=-\dfrac{1}{2}$

soit $\boxed{\lim\dfrac{\ln(1+2x)}{\ln(1-4x)}=-1/2}$

(e) On a : $2 \underset{+\infty}{=} o(x)$ donc $x+2 \underset{+\infty}{\sim} x$

et : $\sqrt{x} \underset{+\infty}{=} o(x) \underset{+\infty}{=} o(x\ln x)$ d'où $x\ln x + \sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x$

si bien que $\dfrac{x+2}{x\ln x+\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(x)}$. Or, par quotient de limites, $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$

AINSI $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x\ln x+\sqrt{x}} = 0}$

(f) Pour tout $x>0$, $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$ et que $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$

alors $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ d'où $n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x$

AINSI $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x$ d'où par continuité de exp : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x}$

EXO 8

(a) • $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ définie sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
• $f(-x) = \ln(1+x^2) = f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc f est paire
$\rightsquigarrow$ on l'étudie sur $[0;+\infty[$
• $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par somme et composition de limites

$x \mapsto 1+x^2 \nearrow$ sur $[0;+\infty[$, $\ln \nearrow$ sur $]0;+\infty[$ donc $f \nearrow$ par composition de fonct° $\nearrow$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

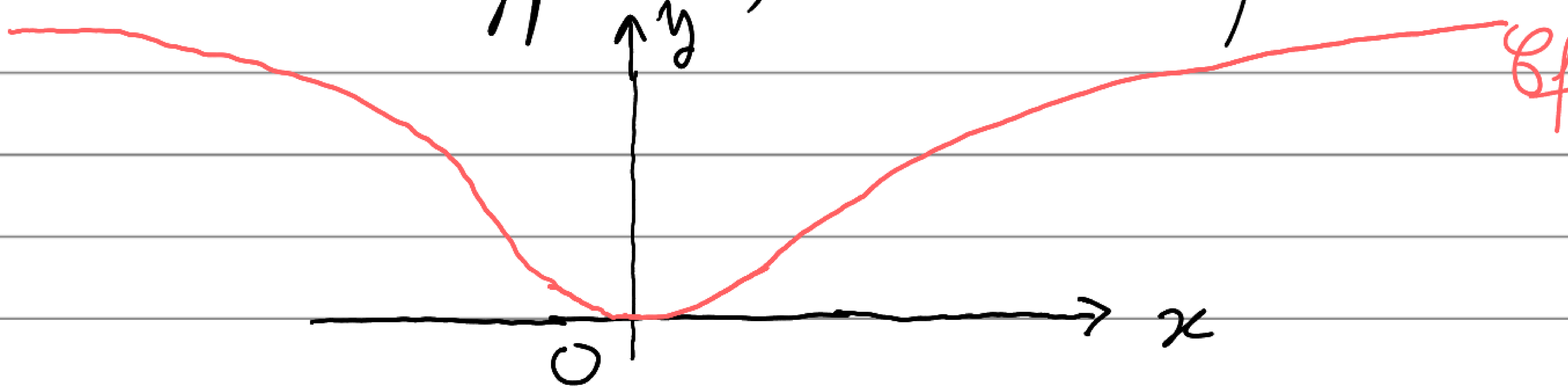
On complète le tableau grâce à la parité

Notons que f admet un minimum local en 0
$\Rightarrow$ présence d'une tangente horizontale (car f dérivable)

ASYMPTOTES ?

Pour $x>0$, $f(x)=\ln\left(x^2(1+1/x^2)\right)=2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\underset{+\infty}{\sim}2\ln(x)$ (avec $2\ln(x)\to+\infty$ et $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\to 0$)

Pas de droite asymptote en $+\infty$, mais la même allure que la courbe de $2\ln$



(b) $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ définie pour $x\neq 0$ (quotient) et $x>0$ ($\ln$) donc $\mathcal{D}_g =]0;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$ par quotient

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

- g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables et pour $x>0$,

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln(x)\times 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$ est du signe de $1-2\ln(x)$

Or $1-2\ln(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x)<1/2 \Leftrightarrow x<e^{1/2}=\sqrt{e}$ par croissance de exp

d'où le tableau de variations de g :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

$g(\sqrt{e})=\dfrac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2}=\dfrac{1}{2e}$

Pour la courbe de g :

* tangente horizontale au niveau du maximum
* (Ox) asymptote en $+\infty$ cf $\lim\limits_{+\infty} g=0$
* (Oy) asymptote en 0 cf $\lim\limits_{0} g=-\infty$

À part ça, rien de spécial à signaler ! Ah si, $f(1)=0$

(c) $h : x \mapsto \ln(\sin x)$ est définie lorsque $\sin(x)>0$, et périodique de période 2π (cf. sin)
On va donc se contenter de l'étudier sur $]0,\pi[$

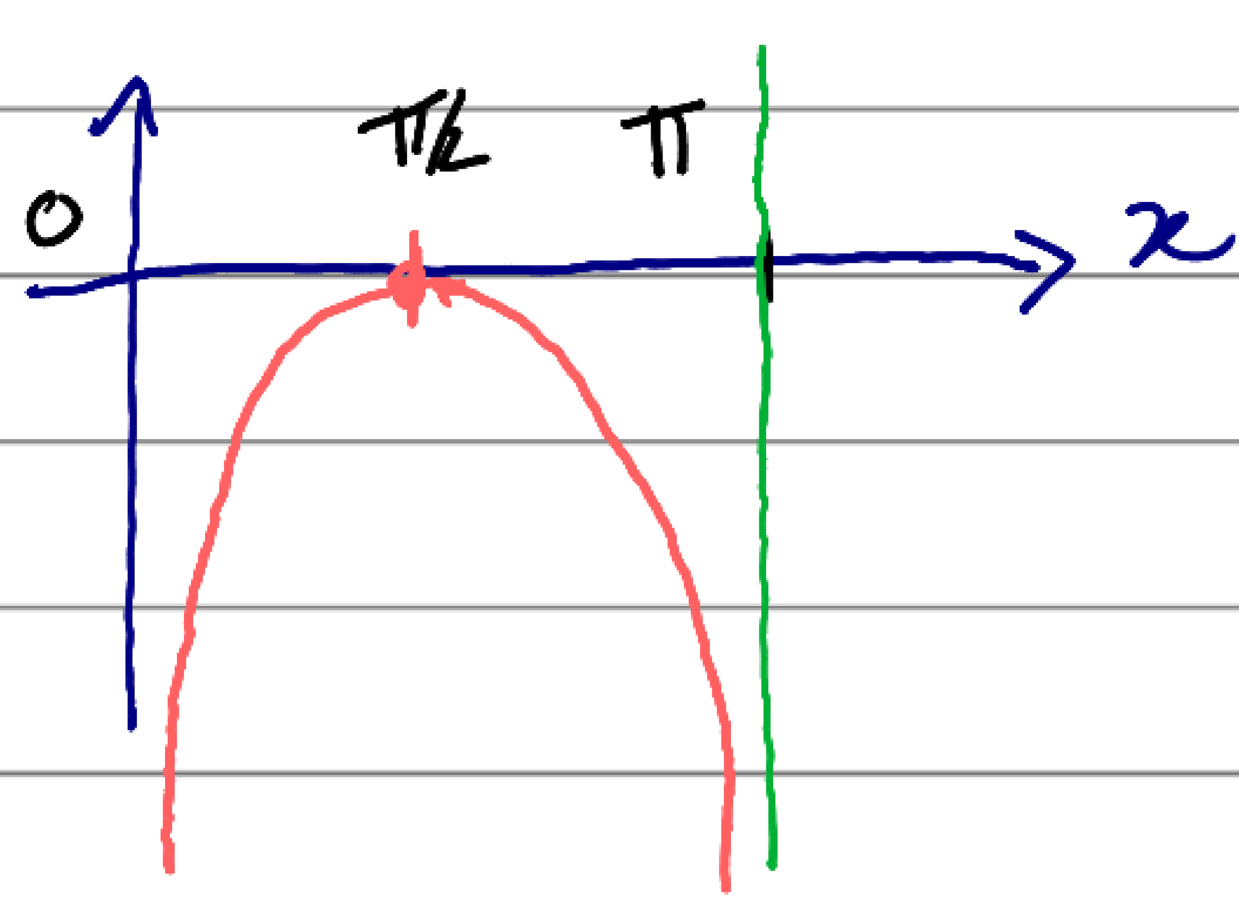
• Comme $\lim_{x\to 0^+} \sin(x) = 0^+$ et $\lim_{x\to \pi^-} \sin(x) = 0^+$ (cf. cercle trigo !)

on a par composition de limites $\boxed{\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{x\to \pi^-} h(x) = -\infty}$

• h est dérivable car [illegible] et $h'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ pour $x \in]0,\pi[$, du signe de $\cos(x)$

x	0		$\pi/2$		π
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Du point de vue graphique
* une tangente horizontale au niveau du max
* deux asymptotes verticales en 0 et en π



Les gourmands peuvent observer que $\Delta : x = \pi/2$ est un axe de symétrie de la courbe car :

• $\mathcal{D}_h =]0,\pi[$ est symétrique par rapport à $\pi/2$

• Pour $|x| < \pi/2$, on a

$$h\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ln\left(\sin\left(\pi/2 - x\right)\right) = \ln(\cos x)$$

donc $h\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \ln(\cos(-x)) = \ln(\cos x) = h\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

EXO 9

(a) $u : x \mapsto x^2+x$ a pour dérivée $u' : x \mapsto 2x+1$

donc $f = \frac{u'}{u}$ admet pour primitive $F : x \mapsto \ln|u(x)| = \boxed{\ln|x^2+x|}$

(b) $v : x \mapsto \ln(x)$ a pour dérivée $v' : x \mapsto 1/x$

donc $g = v'v = \frac{1}{2} \times 2v'v$ a pour primitive $G : x \mapsto \frac{v^2(x)}{2} = \boxed{\frac{\ln(x)^2}{2}}$

(c) Posons $u : x \mapsto x^2+1+\sin(x)$. Alors $u' : x \mapsto 2x+\cos(x)$

et $h = \frac{u'}{(1+\sqrt{u})\sqrt{u}} = 2 \times \frac{1}{1+\sqrt{u}} \times \underbrace{\frac{u'}{2\sqrt{u}}}_{\text{dérivée de } 1+\sqrt{u}}$ est la dérivée de $H = 2\ln(1+\sqrt{u})$

donc h admet pour primitive $H : x \mapsto \boxed{2\ln\left(1+\sqrt{x^2+1+\sin(x)}\right)}$

EXO 10

(a) On pose $f : x \mapsto e^x-1-x$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x-1$

Comme exp ↗, alors $e^x-1 = e^x-e^0$ est du signe de $x-0 = x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

$f(0) = 1-1 = 0$

On déduit du tableau de variations que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, càd

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1+x}$

(b) Même démarche avec $g : x \mapsto e^x-1-x-x^2/2$ sur $]0;+\infty[$

Elle est dérivable et $g'(x) = e^x-1-x = f(x) \geq 0$ cf question (a)

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	

$g(0) = 1-1 = 0$

On déduit du tableau que $g(x) \geq 0$ soit

$\boxed{\forall x \geq 0 \quad e^x \geq 1+x+x^2/2}$

EXO 11

(a) $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$ et $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$

donc $e^{\sin(x)} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ soit $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x} = 1}$

(b) Pour $x>0$, on a : $\frac{e^{\ln(x)}-1}{x} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$

d'où $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(x)}-1}{x} = -\infty}$

(c) On a $x e^x - x^2 = x(e^x - x)$. Or $x \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$ d'après les croissances comparées

donc $xe^x - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} xe^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi $\boxed{\lim_{x\to+\infty} (xe^x - x^2) = +\infty}$

(d) On a : $x^2 \underset{+\infty}{=} o(e^x)$ d'après les croissances comparées

donc $e^x + x^2 \sim e^x$ et $\frac{e^{2x}}{e^x+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ d'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^x+x^2} = +\infty}$

EXO 12

(a) $2^{x+3} = 3^{x+2} \Leftrightarrow \ln(2^{x+3}) = \ln(3^{x+2}) \Leftrightarrow (x+3)\ln(2) = (x+2)\ln(3)$

$\Leftrightarrow 3\ln 2 - 2\ln 3 = x\ln 3 - x\ln 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\ln 2 - 2\ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$ $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{3\ln 2 - 2\ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \right\}}$

(b) Posons $X = 2^x$. Alors $2^{x-1} + 2^{2-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{X}{2} + \frac{4}{X} = 3 \Leftrightarrow X^2 + 8 = 6X$

$\Leftrightarrow X^2 - 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow X = 2$ ou $X = 4$ (racines évidentes)

$\Leftrightarrow 2^x = 2$ ou $2^x = 4$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 2$ car $\exp_2$ est une bijection

$\boxed{\mathcal{S} = \{1; 2\}}$

(c) Posons $X = x^{2/5}$. Alors $2x^{4/5} - 5x^{2/5} + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 2 \text{ (racine évidente) ou } X = 1/2$$

$$\Leftrightarrow x^{4/5} = 2 \text{ ou } x^{2/5} = 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{5/2} \text{ ou } x = 2^{-5/2}$$ puissance $5/2$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{2^{5/2} ; 2^{-5/2}\}}$$

(d) • $5^x - 12 \times 2^x = 29 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x - 29\left(\frac{1}{2}\right)^x = 12$ après division par 2^x

Or $x \mapsto \left(\frac{5}{2}\right)^x$ est $\nearrow$ et $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ est $\searrow$ str

donc $f : x \mapsto \left(\frac{5}{2}\right)^x - 29\left(\frac{1}{2}\right)^x$ est strictement croissante, donc INJECTIVE

• Il suffit donc de trouver une solution de notre équation pour être assurés que c'est la seule.

À tout hasard, essayons $x = 3$ (une idée, comme ça...)

$5^3 - 12 \times 2^3 = 125 - 12 \times 8 = 125 - 96 = 29$... MIRACLE !

• Ainsi, $5^x - 12 \times 2^x = 29 \Leftrightarrow x = 3$ $\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}$

EXO 13

(a) (2^n) est croissante str ; comme $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$,

alors $2^n < 10^3 \Leftrightarrow n \leq 9$ $\boxed{\mathcal{S} = [\![0 ; 9]\!]}$

(b) (3^n) est str $\nearrow$; comme $3^4 = 81$ et $3^5 = 243$

alors $3^n < 100 \Leftrightarrow n \leq 4$ $\boxed{\mathcal{S} = [\![0 ; 4]\!]}$

(c) $(0{,}2)^n > 0{,}0001 \Leftrightarrow 5^n < 10000$ par passage à l'inverse

Or (5^n) est str $\nearrow$, $5^4 = 625$, $5^5 = 3125$ et $5^6 = 15625$

donc $5^n < 10000 \Leftrightarrow n \leq 5$ $\boxed{\mathcal{S} = [\![0 ; 5]\!]}$

EXO 14

(a) $f : x \mapsto x^n\sqrt{x} = x^{n+1/2}$ donc $f' : x \mapsto \left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n-1/2} = \left(n+\frac{1}{2}\right)x^{n-1}\sqrt{x}$

(b) $g : x \mapsto \sqrt[4]{e^x} = e^{x/4}$ donc $g' : x \mapsto \frac{1}{4}e^{x/4}$

(c) $h : x \mapsto \ln\left(x+e^{(x^3-2)^{1/5}}\right)$ donc $h' : x \mapsto \dfrac{1+\frac{1}{5}\times 3x^2\times(x^3-2)^{-4/5}\times e^{(x^3-2)^{1/5}}}{x+e^{(x^3-2)^{1/5}}}$

EXO 15

(a) $f : x \mapsto \exp\left(\frac{x}{x+1}\right)$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;+\infty[$

• $\frac{x}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1} = 1$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e}$ par continuité de exp

De même $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = e}$. Ainsi, $\mathcal{D}_1 : y = e$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x+1) = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{x}{x+1} = -\infty$ par quotient et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = 0}$ par composition

De même, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{x}{x+1} = +\infty$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = +\infty}$. Ainsi, $\mathcal{D}_2 : x = -1$ est asymptote

• f dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et $f(x) = \exp\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$ d'où $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}\exp\left(\frac{x}{x+1}\right) > 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$+$	||	$+$	
f	e	$\nearrow$	$+\infty$ || 0	$\nearrow$	e

EN -1^+ on prolonge f par $f(-1) = 0$

$\frac{f(x)-0}{x+1} = \frac{1}{x+1}\exp\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{x}\times\frac{x}{x+1}\exp\left(\frac{x}{x+1}\right)$

Or $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{x} = -1$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{x}{x+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ par croissances comparées

De ce fait, $\lim \frac{f(x)-0}{x+1} = 0$: la fonction f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1) = 0$.

Ainsi, la courbe possède une tangente horizontale au point $(-1;0)$

(b) • $g : x \mapsto x e^{\sqrt{1-x^2}}$ définie pour $1-x^2 \geq 0$ soit $-1 \leq x \leq 1$ $\qquad \mathcal{D}_g = [-1;1]$

Notons que $g(-x) = -g(x)$: la fonction g est IMPAIRE

• g est dérivable sur $]-1;1[$ et

$$g'(x) = e^{\sqrt{1-x^2}} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{e^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2} - x^2\right)$$ fonction PAIRE

$\varphi : x \mapsto \sqrt{1-x^2} - x^2$ est dérivable et $\varphi'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - 2x$ est du signe de $-x$

c'est une fonction paire

x	-1		$-\alpha$		0		α		1
φ'				$+$	0	$-$			
φ	-1	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	-1
g'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
g	-1	$\searrow$	$-g(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	1

$\varphi(0) = 1 \quad \varphi(1) = -1$

donc φ s'annule en α et en $-\alpha$

$g(1) = 1 \quad g(0) = 0 \quad g(-1) = -1$

$g(\alpha) = \alpha e^{\alpha^2} \quad g(-\alpha) = -\alpha e^{\alpha^2}$

α solution >0 de $\varphi(x) = 0 \iff \sqrt{1-x^2} = x^2 \iff 1-x^2 = x^4 \iff x^4 + x^2 - 1 = 0$

Avec $X = x^2$, on obtient $X^2 + X - 1 = 0$. $\Delta = 1+4 = 5 \rightsquigarrow X = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $X = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

NON car $X \geq 0$

soit $x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

• En $-\alpha$ et α : g' s'annule donc $\mathcal{C}_g$ possède des tangentes horizontales

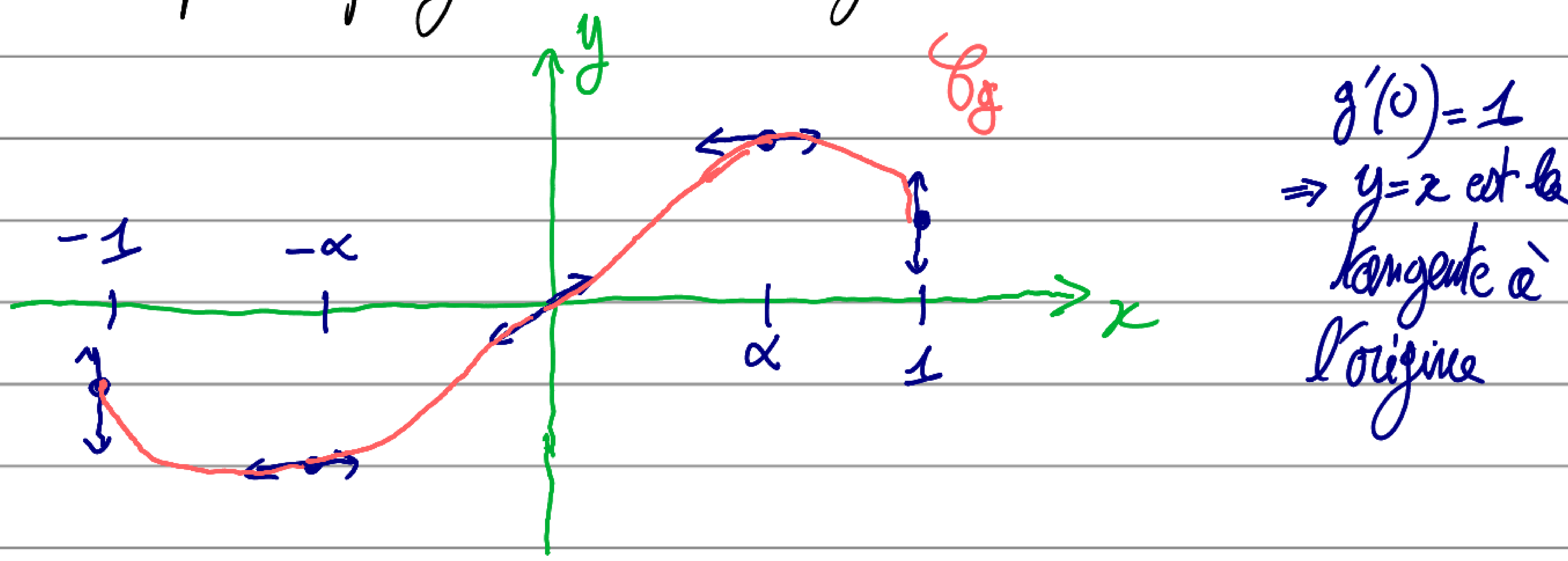
• En 1 et en -1 : g' n'existe pas a priori donc on regarde sa limite

$e^{\sqrt{1-x^2}} \to e^0 = 1$, $\sqrt{1-x^2} - x^2 \to -1$ et $\sqrt{1-x^2} \to 0^+$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} g'(x) = -\infty$ par produit et quotient de limites

Par parité, on a de même $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} g'(x) = -\infty$.

Ces deux limites prouvent que $\mathcal{C}_g$ admet deux tangentes verticales en $A(1;1)$ et $B(-1;-1)$



(c) À FINIR