

CHAPITRE 19

EXO 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 15 & 15 \\ 11 & 16 & 39 & 39 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & 13 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \bullet A^5 = (A^2)^2 \times A$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 17 & 11 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix} \quad \cos \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ \text{et } \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \cos \cos(3\alpha) = \cos(2\alpha)\cos(\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(\alpha) \\ \text{et } \sin(3\alpha) = \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \cos(2\alpha)\sin(\alpha)$$

On montre sans difficulté par récurrence que

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\alpha) & -\sin(n\alpha) \\ \sin(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$$

EX02

(a) On cherche toutes les matrices $M \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } AM = MA \Leftrightarrow \begin{cases} a+c = a \\ b+d = a+b \\ c = c \\ d = c+d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a \end{cases} \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'ensemble recherché est

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) Même démarche avec cette fois $M \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 3a+d+2g & 3b+e+2h & 3c+f+2i \end{pmatrix}$$

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+c & c \\ d+3f & e+f & 2f \\ g+3i & h+i & 2i \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } AM = MA \Leftrightarrow \begin{cases} a = a+3c \\ b = b+c \\ c = 2c \\ d = d+3f \\ e = e+f \\ f = 2f \end{cases} \begin{matrix} c=0 \\ f=0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 3a+d+2g &= g+3i \rightarrow d \\ 3b+e+2h &= h+i \rightarrow e \\ 3c+f+2i &= 2i \rightarrow 0=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ f=0 \\ d = -3a - g + 3i \\ e = -3b - h + i \end{cases}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -3a-g+3i & -3b-h+i & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} \right\}$$

$a, b, g, h, i \in \mathbb{R}$

EX03

Si C est inversible, $A = B \times C \Leftrightarrow B = A C^{-1}$

On cherche d'inverser C : pour $X(x; y; z)$ et $Y(a; b; c)$, on a

$$CX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x - y - z = b \\ -5x - 3z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -5y + z = b - 2a \\ 10y - 8z = c + 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = a \\ -5y + z = b - 2a \\ -6z = a + 2b + c \end{cases}$$

$L2 \leftarrow L2 - 2L1; L3 \leftarrow L3 + 5L1 \quad L3 \leftarrow L3 + 2L2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = a - 2y + z = \frac{3a}{30} + \frac{6b}{30} - \frac{3c}{30} \\ y = (z + 2a - b)/5 = \frac{11a}{30} - \frac{8b}{30} - \frac{c}{30} \\ z = -\frac{a}{6} - \frac{b}{3} - \frac{c}{6} = -\frac{5a}{30} - \frac{10b}{30} - \frac{5c}{30} \end{cases} \Rightarrow X = C^{-1}Y$$

avec $C^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 11 & -8 & -1 \\ -5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

VERIFICATION $CC^{-1} = I_3$

Ans

$$B = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 11 & -8 & -1 \\ -5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

soit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EX04

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$N^k = 0 \quad \forall k \geq 3$$

$$A = \alpha I + bN \quad \text{avec } I = I_4 \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } N^k = 0 \quad \forall k \geq 4$$

En outre, $IN=NI=N$ donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (aI + bN)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k N^k a^{n-k} I^{n-k} = \sum_{k=0}^3 \binom{n}{k} a^{n-k} b^k N^k \quad \text{car } N^4=0$$

$$= a^n I + n a^{n-1} b N + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 N^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} b^3 N^3$$

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & n a^{n-1} b & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} b^3 \\ 0 & a^n & n a^{n-1} b & \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 \\ 0 & 0 & a^n & n a^{n-1} b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

• On observe que $J=A$ dans le cas où $a=b=1$. De ce fait,

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Notons que $M+2I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2U$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 soit $M = 2(U-I)$. Comme $UI=IU=I$, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$M^n = 2^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} U^k = (-2)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{-k} U^k$$

Or

$$U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3U \quad \text{donc } U^3 = 3U^2 = 9U \text{ et } U^k = 3^{k-1}U \text{ pour } k \geq 1$$

de manière plus générale

Comme $(-1)^{-k} = (-1)^k$, il vient $M^n = (-2)^n \left(I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \underbrace{3^{k-1}}_{1/3 \times 3^k} U \right)$

$$\text{d'où } M^n = (-2)^n I + (-2)^n \frac{U}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-3)^k$$

$$\text{Binôme de Newton: } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-3)^k = (-3+1)^n = (-2)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-3)^k$$

$$\text{Ainsi } M^n = (-2)^n I + (-2)^n \frac{U}{3} (-2)^n - 1 = (-2)^n \left(I + \frac{(-2)^n - 1}{3} U \right)$$

Ça paraît bizarre mais on obtient bien I pour $n=0$ et $-2(I-U) = 2(U-I) = M$ pour $n=1$... donc les calculs doivent être corrects!

$$\text{De plus, } U = U - I + I \text{ donc } I + \frac{(-2)^n - 1}{3} U = I + \frac{(-2)^n - 1}{3} (U - I) + \frac{(-2)^n - 1}{3} I$$

$$= \frac{(-2)^n - 1}{3} (U - I) + \frac{(-2)^n + 2}{3} I$$

$$\text{soit } M^n = \frac{(-2)^n}{3} \left[(-2)^n - 1 (U - I) + (-2)^n + 2 I \right]$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{(-2)^n}{3} \begin{pmatrix} (-2)^n + 2 & (-2)^n - 1 & (-2)^n - 1 \\ (-2)^n - 1 & (-2)^n + 2 & (-2)^n - 1 \\ (-2)^n - 1 & (-2)^n - 1 & (-2)^n + 2 \end{pmatrix}}$$

EXO 6

Multiplier deux matrices diagonales revient à multiplier leurs termes diagonaux.
De ce fait, $A^k = \text{Diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$

$$\text{et } \lambda_k A^k = \text{Diag}(\lambda_k a_1^k, \lambda_k a_2^k, \dots, \lambda_k a_n^k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et } \lambda_k \in \mathbb{C}$$

Par conséquent, si $P = \sum_{k \geq 0} \lambda_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$P(A) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k A^k = \text{Diag} \left(\sum \lambda_k a_1^k, \sum \lambda_k a_2^k, \dots, \sum \lambda_k a_n^k \right)$$

$$= \text{Diag} (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n))$$

De fait, $P(A)=0$ si, et seulement si, $P(a_i)=0$ pour tout $i \in [1;n]$

EX06

• Pour $X(x,y,z,t)$ et $Y(a,b,c,d)$, on a :

$$AX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + 2t = a \\ 2x + y + 3t = b \\ x + z = c \\ y + t = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = c & (L3) \\ y + t = d & (L4) \\ 2t = a - c & (L1) - (L3) \\ y - 2z + 3t = b - 2c & (L2) - 2(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = c \\ y + t = d \\ -2z + 2t = b - 2c - d & (L4) - (L2) \\ 2t = a - c & (L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = c \\ y + t = d \\ -2z = -a + b - c - d & (L3) - (L4) \\ 2t = a - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = c - z = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - \frac{d}{2} \\ y = d - t = -\frac{a}{2} + \frac{c}{2} + d \\ z = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d}{2} \\ t = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

• Pour $X(x,y,z)$ et $Y(a,b,c)$, on a :

$$BX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = a \\ x + z = b \\ x + y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ -y + z = b - c & (L2) - (L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ 2z = a + b - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = c - y = -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ y = a - z = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \\ z = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} \end{cases}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

• Pour $X(x, y, z)$ et $Y(a, b, c)$, on a :

$$CX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ -x + 2y = b \\ 3x + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = \frac{b+x}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \\ z = \frac{c-3x}{2} = \frac{-3a}{2} + \frac{c}{2} \end{cases}$$

$$\bar{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

• Pour $X(x, y, z)$ et $Y(a, b, c)$, on a :

$$DX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = a \\ -x + 2y - z = b \\ x + y + 4z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = a \\ -3z = a + b & (L2) + (L1) \\ 3y + 6z = -a + c & (L3) - (L1) \end{cases}$$

$$(L3) + 2(L2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = a \\ 3y = a + 2b + c \\ -3z = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2y + 2z = a + \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c \\ y = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \\ z = -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b \end{cases}$$

d'où $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

• Toujours pareil :

$$EX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y = a - b + c \\ y = b - z = b - c \\ z = c \end{cases}$$

d'où $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• Pour $X(x, y, z)$ et $Y(a, b, c)$ on a :

$$FX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=a \\ x+y+2z=b \\ 2y+3z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=b-a & (2)-(1) \\ y+2z=a \\ -z=c-2a & (3)-(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -a+b \\ y=a-2z & = -3a+2c \\ z & = 2a-c \end{cases}$$

$$\boxed{F^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

EXO 7

Idee: $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2) \dots$ y a qu'à développer!

On applique ceci à A :

$$I-A^3 = (I-A)(I+A+A^2) = I \text{ car } A^3=0$$

si bien que $I-A$ est inversible et d'inverse $\boxed{I+A+A^2}$

REM: on pense à ce genre de formules en se rappelant les sommes de suites géométriques

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{si } x \neq 1$$

d'où $\boxed{1-x^{n+1} = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)}$