CHAPITRE 20

Exos 14 à 30

EXO 14

(a) $\lim \left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n$?

- Si $a=b$: alors $\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n = \left(a^{1/n}\right)^n = a$ donc $\boxed{\lim \left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n = a}$
- Sinon : comme $a^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln a} = 1 + \frac{\ln(a)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b^{1/n} = 1 + \frac{\ln(b)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

alors $\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2} = 1 + \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{\ln(ab)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Or $\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)\right]$ $\boxed{e^u = 1+u+o(u)}$ $\boxed{\ln(1+u) = u+o(u)}$

avec $\ln\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln(ab)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\ln(ab)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $n \ln\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right) = \frac{\ln(ab)}{2} + o(1) \longrightarrow \frac{1}{2}\ln(ab) = \ln\left(\sqrt{ab}\right)$

soit par composition $\boxed{\lim \left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}}$

(b) $\lim \left(a^n+b^n\right)^{1/n}$?

- Si $a=b$: alors $\left(a^n+b^n\right)^{1/n} = \left(2a^n\right)^{1/n} = 2^{1/n}a \longrightarrow a$ car $2^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln 2}{n}} \to e^0 = 1$

Ainsi $\boxed{\lim \left(a^n+b^n\right)^{1/n} = a}$

- Si $a>b$: alors $\left(a^n+b^n\right)^{1/n} = \left[a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)\right]^{1/n} = a\, e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} \longrightarrow a$

car $\left(\frac{b}{a}\right)^n \to 0$ donc $\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right) \longrightarrow 0$ par somme, composée et produits de limites

Ainsi $\boxed{\lim (a^n+b^n)^{1/n} = a}$

- Si $b>a$, on montre de même que $\boxed{\lim (a^n+b^n)^{1/n} = b}$

EXO 15

(a) Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a : $n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2+1} \geq \frac{1}{n^2+k} \geq \frac{1}{n^2+n} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+k} \geq \frac{n}{n^2+n}$$

si bien que $$\frac{n^2}{n^2+1} \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}}_{u_n} \geq \frac{n^2}{n^2+n} = \frac{n}{n+1}$$

Or $\frac{n^2}{n^2+1} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1 \to 1$ et $\frac{n}{n+1} \sim \frac{n}{n} = 1 \to 1$

donc on déduit du théorème des gendarmes que $\boxed{\lim u_n = 1}$

(b) De même, $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

donc $$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}_{v_n} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Or $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \sim \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1 \to 1$ et $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{n}{\sqrt{n^2}} \to 1$

donc on déduit du théorème des gendarmes que $\boxed{\lim v_n = 1}$

(c) De même, $\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

donc $$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq w_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}$$

Or $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \sim \frac{n^2}{\sqrt{n^4}} = 1 \to 1$ et $\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} \sim \frac{n^2}{\sqrt{n^4}} = 1 \to 1$

si bien que $\boxed{\lim w_n = 1}$ cf. Thme des Gendarmes

EXO 16

(a) D'après le cours, $2^n = o(n!)$ donc $\boxed{\lim \frac{2^n}{n!} = 0}$

On retrouve ceci par calcul direct en notant que pour $n \geq 2$,

on a $0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \times \overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{} \times 2}{1 \times \underbrace{2 \times 3 \times \cdots \times (n-1)}_{\leq 1} \times n} \leq \frac{4}{n}$

d'où le résultat en utilisant le théorème des gendarmes

(b) D'après le cours, $n^2 = o(2^n)$ donc $\boxed{\lim \frac{n^2}{2^n} = 0}$

On peut le retrouver en notant que $\ln\left(\frac{n^2}{2^n}\right) = 2\ln n - n\ln 2 = n\left(\frac{2\ln(n)}{n} - \ln 2\right)$ tend vers $-\infty$

0 C.C.

(c) D'après le cours, $n^3 = o(e^n)$ et $e^n = o(n!)$ donc $n^3 = o(n!)$ soit $\boxed{\lim \frac{n^3}{n!} = 0}$

On retrouve ceci par calcul direct en écrivant pour $n \geq 4$

$0 \leq \frac{n^3}{n!} = \underbrace{\frac{1}{1 \times 2 \times \cdots \times (n-3)}}_{\leq 1} \times \frac{n \times n \times \cancel{n}}{(n-2) \times (n-1) \times \cancel{n}} \leq \frac{n^2}{(n-3)(n-2)(n-1)}$

Comme $\frac{n^2}{(n-3)(n-2)(n-1)} \sim \frac{1}{n} \longrightarrow 0$, on retrouve le résultat à l'aide de la gendarmerie.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = n\ln\left(1 + 1/n\right)$

$= n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ puisque $\ln(1+u) \underset{u \to 0}{=} u + o(u)$

$= 1 + o(1)$

donc $\boxed{\lim n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1}$

Rien de bien méchant dans cet exercice !

EXO 17

L'idée est ici d'observer que ces deux suites sont quasi arithmétique et quasi géométrique, et d'utiliser ceci pour établir par récurrence des inégalités intéressantes.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{3(n+1)} \leq \frac{2n+2}{3(n+1)} \leq \frac{2}{3}$

Comme $u_n \geq 0$ (on le montre par récurrence immédiate), on a $\boxed{0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3} u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

On va alors en déduire que $0 \leq u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n u_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\Rightarrow$ DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE À EFFECTUER

On conclut grâce au théorème des gendarmes que $\boxed{\lim u_n = 0}$

2) $\lim \frac{n-1}{2n+3} = \frac{1}{2}$ puisque $\frac{n-1}{2n+3} \sim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|l} n-1 & 2n+3 \\ \hline -5/2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

De ce fait : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{n-1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

Prenons $\varepsilon = 1/4$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\left| \frac{n-1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < 1/4$

soit $\boxed{1/4 < \frac{n-1}{2n+3} < 3/4}$

EN PARTICULIER $\boxed{u_{n+1} \geq u_n + 1/4 \text{ pour } n \geq n_0}$

On va alors en déduire que

$$u_n \geq u_{n_0} + \frac{n-n_0}{4} \quad \text{pour tout } n \geq n_0$$

$\Rightarrow$ DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE À EFFECTUER

On conclut grâce au théorème de minoration que $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

IDÉE À RETENIR

Quand une suite est quasi-géométrique, on peut tenter de la comparer à une suite géométrique !
Idem pour une suite quasi-arithmétique !

EXO 18

Par décroissance de (u_n), on a $u_{n+1} \leq u_n \leq u_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

d'où $u_n + u_{n+1} \leq 2u_n \leq u_{n-1} + u_n$

soit $n(u_n + u_{n+1}) \leq 2n\, u_n \leq n(u_{n-1} + u_n)$

OR $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$ donc $n(u_n + u_{n+1}) \sim 1$ et $u_{n-1} + u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$ donc $n(u_{n-1} + u_n) \sim 1$

AINSI $\lim n(u_n + u_{n+1}) = 1 = \lim n(u_{n-1} + u_n)$ donc $\lim 2n\, u_n = 1$ (Gendarmes)

soit $2n\, u_n \sim 1$ et donc $\boxed{u_n \sim \frac{1}{2n}}$

EXO 19

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n(1+1/n)} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+1/n} - 1\right)$

OR $\sqrt{1+u} \underset{u \to 0}{=} 1 + u/2 + o(u)$ et $\lim 1/n = 0$

donc $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

AINSI $\boxed{u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}}$

(b) On sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\cos x \underset{0}{\sim} 1$ donc $\tan x \underset{0}{\sim} x$

Or $\frac{\pi}{n+3} \to 0$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{n+3}\right) \sim \frac{\pi}{n+3} \sim \frac{\pi}{n}$

AINSI $\boxed{u_n \sim \frac{\pi}{n}}$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{n+2-1}{n+2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$

OR $\ln(1-u) \underset{u \to 0}{=} -u + o(u) \underset{0}{\sim} -u$ et $\frac{1}{n+2} \sim \frac{1}{n} \to 0$

donc $\boxed{u_n \sim -\frac{1}{n}}$

EXO 20

1) Considérons $f : x \mapsto \tan(x) - \frac{1}{x}$ sur $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$

- $f'(x) = 1 + \tan^2(x) + \frac{1}{x^2} > 0$ donc f est strictement croissante
- f est continue comme somme de fonctions continues
- $\lim\limits_{x \to n\pi} f(x) = -\frac{1}{n\pi}$ (cf. $\tan(n\pi) = 0$) et $\lim\limits_{x \to n\pi + \pi/2} f(x) = +\infty$ (somme de limites)

d'où le tableau de variations

x	$n\pi$	$n\pi + \pi/2$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{n\pi}$ $\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que f s'annule une seule fois sur $]n\pi, n\pi + \pi/2[$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists!\, x_n \in]n\pi, n\pi + \pi/2[,\ \tan(x_n) = \frac{1}{x_n}}$$

2) Par périodicité $\tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = 1/x_n$

Or $n\pi < x_n < n\pi + \pi/2$ d'où $1 < \frac{x_n}{n\pi} < 1 + \frac{1}{2n}$

On déduit du Thme des Gendarmes que $\lim \frac{x_n}{n\pi} = 1$

d'où $x_n \sim n\pi$ et $\boxed{\tan(x_n - n\pi) \sim \frac{1}{n\pi}}$

En outre $x_n - n\pi \in]0, \pi/2[$ donc $x_n - n\pi = \arctan(\tan(x_n - n\pi))$

Or $\arctan x \underset{0}{\sim} x$ et $\tan(x_n - n\pi) \sim \frac{1}{n\pi} \to 0$

si bien que

$$\boxed{x_n - n\pi \sim \frac{1}{n\pi}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 + o(1) \\ \arctan x = x + o(x) \underset{0}{\sim} x \end{array}}$$

REMARQUE on a ainsi établi que $\boxed{x_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$

EXO 21

- Par construction, on a $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- De plus, on passe de u_n à u_{n+1} en ajoutant des chiffres à l'écriture décimale de u_n, donc $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

AINSI: $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante et majorée, donc convergente.}}$

EXO 22

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 0,\underbrace{3\dots3}_{n}\underbrace{8\dots8}_{n}$ donc $0 \leq u_n \leq 1$

En outre,

$$\begin{cases} u_n = 0,\overbrace{3\dots3}^{n}\,\boxed{8}\,\overbrace{8\dots8}^{n}\,\boxed{} \\ u_{n+1} = 0,\underbrace{3\dots3\,\boxed{3}}_{n+1}\,\underbrace{8\dots8\,\boxed{88}}_{n+1} \end{cases}$$

donc $u_n > u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

AINSI $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante et minorée, donc convergente}}$

EXO 23

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ »

(I) $u_1 = \frac{1}{1^3} = 1$ et $2 - \frac{1}{1} = 1 \geq u_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Alors $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq 2 - \frac{1}{n}$ $\quad + \frac{1}{(n+1)^3}$

d'où $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3}$

QUESTION: a-t-on $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$?

Il suffit de regarder le signe de la différence

On a : $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}-\left(2-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^3}-\frac{1}{n}$

$$=\frac{n(n+1)^2+n-(n+1)^3}{n(n+1)^3}$$

$$=\frac{n^3+2n^2+n+n-(n^3+3n^2+3n+1)}{n(n+1)^3}$$

$$=\frac{-n^2-n-1}{n(n+1)^3}<0$$

donc $2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}\leq 2-\frac{1}{n+1}$

d'où $u_{n+1}\leq 2-\frac{1}{n+1}$: ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

(c) On déduit du principe de récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $\boxed{u_n\leq 2-1/n}$

2) • En particulier, on a $u_n\leq 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

• Par ailleurs, $u_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}+\frac{1}{(n+1)^3}=u_n+\frac{1}{(n+1)^3}>u_n$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante

Ainsi la suite est croissante et majorée, donc convergente.

EXO 24

• Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $(n+1)!-n!=(n+1)\times n!-n!=n\times n!\geq 0$ donc la suite de terme général $n!$ est croissante

• De plus, pour tout $n\geq 2$, on peut écrire $n!=\underbrace{1\times\cdots\times(n-1)\times n}_{\geq n}\geq n$

donc pour tout réel $A\geq 0$, il existe $n_0=\lfloor A+1\rfloor$

tel que pour tout $n\geq n_0$, $n!\geq n\geq n_0>A$: la suite $(n!)$ n'est pas majorée

Cette suite étant croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$

EXO 25

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Or $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ donc $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > 2\sqrt{n}$ et $\boxed{\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}}$

2) Il en découle que $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ pour tout $k \in [[1;n]]$

d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2 \boxed{\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$ ⟵ SOMME TELESCOPIQUE

soit $u_n > 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})$ après telescopage

On déduit alors du Thme de Minoration que $\boxed{\lim u_n = +\infty}$

EXO 26

1) Pour $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}$ puisque $n(n-1) \leq n^2$

2) Il en découle que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \in [[2;n]]$

d'où $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \boxed{\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)}$ ⟵ SOMME TELESCOPIQUE

soit $u_n - 1 \leq 1 - 1/n$ après telescopage

AINSI $u_n \leq 2 - 1/n \leq 2$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée

Par ailleurs, $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} > u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \nearrow$

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, elle converge.

EXO 27

1) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $0 \leq \sin(t) \leq 1$ par croissance du sin

donc : $0 \leq \sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$ $\quad (\times \sin^n(t))$

et : $\int_0^{\pi/2} 0\,dt \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\,dt \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt$

soit $\boxed{0 \leq I_{n+1} \leq I_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2)(a) On va calculer I_{n+2} à l'aide d'une IPP :

$\left| \begin{array}{l} f(t) = \sin^{n+1}(t) \\ g'(t) = \sin(t) \end{array} \right.$ $\quad \left| \begin{array}{l} f'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^n(t) \\ g(t) = -\cos(t) \end{array} \right.$ $\quad \int fg' = [fg] - \int f'g$

Alors $I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t) \times \sin(t)\,dt = \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\underbrace{\cos^2(t)}_{1-\sin^2 t}\sin^n(t)\,dt$

$= -0+0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} \left(\sin^n(t) - \sin^{n+2}(t)\right)dt$

$= (n+1)\left[\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(t)\,dt\right]$

$= (n+1)(I_n - I_{n+2})$

d'où $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$ soit $\boxed{(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

(b) Ainsi $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}$ donc $I_2 = \frac{1}{2} I_0$, $I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\times 1}{4\times 2} I_0, \dots, I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2}$

et $I_{2p} = \frac{1\times 3 \times \dots \times (2p-1)}{2\times 4 \times \dots \times 2p} I_0 = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times \dots \times (2p-1)\times 2p}{2\times 2\times 4\times 4\times \dots \times 2p\times 2p} I_0$

$= \frac{(2p)!\, I_0}{(2\times 4 \times \dots \times 2p)^2} = \frac{(2p)!\, I_0}{(2^p p!)^2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} I_0$

OR $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$ donc

$$\boxed{I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

De même $I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2p}{3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)} I_1 = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times \dots \times 2p \times 2p}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 2p \times (2p+1)} I_1$

$= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} I_1$

Or $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)dt = \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = 1$ donc $\boxed{I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$

3(a) Posons $u_n = (n+1) I_{n+1} I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

Alors $u_{n+1} = \underbrace{(n+2) I_{n+2}}_{2(a)} I_{n+1} = (n+1) I_n I_{n+1} = u_n$ donc la suite (u_n) est constante

Or $u_0 = I_1 I_0 = \pi/2$

si bien que $u_n = u_0 = \pi/2$ soit $\boxed{(n+1) I_{n+1} I_n = \pi/2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

(b) Comme (I_n) est décroissante d'après la question 1), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$

soit $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Or $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$ question 2(a)

donc $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$

AINSI $\boxed{\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

(c) On déduit alors du théorème des gendarmes que $\lim \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ soit $I_{n+1} \sim I_n$

De ce fait, $\frac{\pi}{2} = (n+1) I_{n+1} I_n \sim n I_n^2$

donc $I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ soit $\boxed{I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$

EXO 28

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{v_n + 3u_n}{4} = \frac{2v_n - 2u_n}{4} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n)$

donc $u_n - v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0) = -(-1/2)^n$

et $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} + \frac{v_n + 3u_n}{4} = \frac{4u_n + 4v_n}{4} = u_n + v_n$

donc $u_n + v_n = u_0 + v_0 = 3$

AINSI $\begin{cases} u_n - v_n = -(-1/2)^n \\ u_n + v_n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_n = 3-(-1/2)^n \\ 2v_n = 3+(-1/2)^n \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} u_n = \dfrac{3-(-1/2)^n}{2} \\ v_n = \dfrac{3+(-1/2)^n}{2} \end{cases}}$

EXO 29

(a) • $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} > u_n$ donc $(u_n) \nearrow$ strictement.

• $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0$ donc $(v_n) \searrow$

• $v_n - u_n = \frac{1}{n} \to 0$

Ainsi $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$

(b) • $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \boxed{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}$ et $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} = \boxed{\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

AINSI la suite (u_n) est croissante

• $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \boxed{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}}$ et $v_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} = \boxed{\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$

donc $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n} = \underbrace{\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n}\right)}_{<0} < 0$

AINSI la suite (v_n) est décroissante

• $v_n - u_n = \frac{1}{n} \to 0$

De ce fait, $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$

EXO 30

1) • $f : x \mapsto x + \ln(x)$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (somme de fonctions ↑)

• De plus $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par somme de limites

donc $n \in]\lim_0 f ; \lim_{+\infty} f[$

On déduit alors du Théorème de la Bijection que : $\boxed{\exists ! x_n \in]0, +\infty[\quad f(x_n) = n}$

2) Comme $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$ et que f est strictement ↑, alors $x_{n+1} > x_n$

donc $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est croissante}}$

Si (x_n) est majorée, alors (x_n) converge vers un réel l.

Comme $f(x_n) = n$ pour tout n et que f est continue, on obtient $f(l) = +\infty$ par passage à la limite

$\Rightarrow$ C'EST ABSURDE

De ce fait, (x_n) n'est pas majorée donc $\boxed{\lim x_n = +\infty}$. Par conséquent, $\ln(x_n) = o(x_n)$

d'où $f(x_n) = x_n + \ln(x_n) \sim x_n$ soit $\boxed{x_n \sim n}$

3) Par définition, $f(x_n) = n = x_n + \ln(x_n)$ donc $x_n = n - \ln(x_n)$

Or $x_n \sim n$ donc $x_n = n + o(n) = n(1 + o(1))$ et $\ln(x_n) = \ln(n) + \ln(1 + o(1)) = \ln(n) + o(1)$

Il en découle que

$$\boxed{x_n = n - \ln(n) + o(1)}$$