CHAPITRE 21

EXO 1

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Soit alors $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x>0$, on a $f(x)-\alpha x = x\left[\frac{f(x)}{x}-\alpha\right]$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}-\alpha = +\infty$ par somme, on conclut par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x) = +\infty$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a bien : $\boxed{\forall \alpha\in\mathbb{R}\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x) = +\infty}$

EXO 2

- Pour $x\in]0,a[$, on a $0<\frac{x}{a}<1$ donc $\lfloor\frac{x}{a}\rfloor = 0$ et $\frac{b}{x}\lfloor\frac{x}{a}\rfloor=0$

De ce fait, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{b}{x}\lfloor\frac{x}{a}\rfloor = 0}$

- Par définition : $\lfloor X\rfloor \leq X < \lfloor X\rfloor+1$ d'où $X-1<\lfloor X\rfloor\leq X$ pour tout $X\in\mathbb{R}$

Pour tout $x>0$, on a donc $\frac{b}{x}-1<\lfloor\frac{b}{x}\rfloor\leq\frac{b}{x}$

d'où $\frac{b}{a}-\frac{x}{a}\leq\frac{x}{a}\lfloor\frac{b}{x}\rfloor\leq\frac{b}{a}$ (comme $\frac{x}{a}>0$)

Comme $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{a}=0$, on déduit du Thm des Gendarmes que $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{a}\lfloor\frac{b}{x}\rfloor=\frac{b}{a}}$

EXO3

Soit f une fonction périodique de période $T>0$ admettant une limite finie l en $+\infty$

- Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas constante : il existe alors deux réels a et b tels que $f(a) \neq f(b)$
- Posons alors $u_n = a+nT$ et $v_n = b+nT$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

* Par périodicité $f(u_n) = f(a+nT) = f(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim f(u_n) = f(a)$

Or $\lim u_n = +\infty$ par produit et somme de limites

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, on a alors $\lim f(u_n) = l$ soit $f(a) = l$

* On montre de même que $\lim f(v_n) = f(b)$ et $\lim f(v_n) = l$ soit $f(b) = l$

* Ainsi $f(a) = f(b) = l$: CONTRADICTION

On a de ce fait montré que $\boxed{f \text{ est nécessairement constante.}}$

EXO4

La fonction $f : x \mapsto x^2 \lfloor 1/x \rfloor$ est bien définie sur $]0;+\infty[$

On sait que la partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: la fonction f va donc présenter des discontinuités lorsque $\frac{1}{x} = n \in \mathbb{N}^*$ soit $x = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

AINSI $\boxed{f \text{ est continue sur tout intervalle } \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.}$

La plus grande valeur de $1/n$ étant 1, il n'y aura plus de problème au-delà de 1.

D'ailleurs, $0 < \frac{1}{x} < 1$ pour $x > 1$ donc $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ et $f(x) = 0$ pour $x > 1$

AINSI $\boxed{f \text{ est nulle (donc continue) sur l'intervalle }]1;+\infty[}$

En 0, par contre, rien d'aussi simple car les points de discontinuité et les intervalles $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$ vont s'accumuler. On peut noter que la limite est facile à calculer :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$

donc $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

En particulier, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} - 1 < \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq \frac{1}{x}$ $\Big\downarrow \times x^2$

donc $x - x^2 < f(x) \leq x$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (x - x^2) = 0$, on déduit du Théorème des Gendarmes que

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = 0}$$

Etablissons enfin la discontinuité en tout point $1/n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Sur $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$ $\quad \frac{1}{n+1} < x < 1/n \Rightarrow n < \frac{1}{x} < n+1 \Rightarrow \lfloor 1/x \rfloor = n \Rightarrow f(x) = n x^2$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1/n \\ <}} f(x) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

Sur $\left]\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right[$ (si $n > 1$) $\quad \frac{1}{n} < x < \frac{1}{n-1} \Rightarrow n - 1 < \frac{1}{x} < n \Rightarrow \lfloor 1/x \rfloor = n - 1 \Rightarrow f(x) = (n-1) x^2$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1/n \\ >}} f(x) = \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1/n \\ <}} f(x)$

si $n = 1$ comme $f(x) = 0$ sur $]1, +\infty[$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$

ce qui montre bien que $\boxed{f \text{ est discontinue en } 1/n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

EXO5

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x + 5) = 7$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax + b) = 2a + b$

$\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ <}} f(x) = \lim\limits_{x\to 8}(ax+b) = 8a+b$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ >}} f(x) = \lim\limits_{x\to 8}(-x+3) = -5$

Comme f est continue car polynomiale sur $]-\infty,2[$, $]2,8[$ et $]8,+\infty[$, il faut et il suffit qu'elle soit continue en 2 et en 8 pour l'être sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, f continue sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ 8a+b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ 6a=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a=-2 \\ b=11 \end{cases}}$

2) Même démarche avec la fonction g

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x-5) = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} -\sqrt{ax+b} = -\sqrt{2a+b}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x<8}} g(x) = \lim\limits_{x\to 8} -\sqrt{ax+b} = -\sqrt{8a+b}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ x>8}} g(x) = \lim\limits_{x\to 8}(-x+b) = b-8$

donc g continue sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2a+b}=-3 \\ -\sqrt{8a+b}=b-8\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=9 \\ 8a+b=(8-b)^2 \end{cases}$ et $b\leq 8$

Ceci implique $(8-b)^2-36 = 8a+b-4(2a+b) = -3b$

$\Leftrightarrow 64-16b+b^2-36=-3b$

$\Leftrightarrow b^2-13b+28=0 \qquad \Delta = 169-112=57$

$\Leftrightarrow b=\dfrac{13-\sqrt{57}}{2}$ ou $b=\dfrac{13+\sqrt{57}}{2} > 10$

Comme $b\leq 8$ nécessairement, on a donc $\boxed{b=\dfrac{13-\sqrt{57}}{2}}$

et $\boxed{a=\dfrac{9-b}{2}=\dfrac{5+\sqrt{57}}{4}}$

EXO6

1) $5x^2-12x+4$ admet pour racines 2 (racine évidente) et 2/5 ($x_1x_2=\frac{c}{a}$)
donc $5x^2-12x+4 = 5(x-2)(x-2/5) = (x-2)(5x-2)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
De ce fait, on a pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f(x) = \frac{5x^2-12x+4}{x-2} = \frac{(x-2)(5x-2)}{x-2} = 5x-2$$

si bien que $\lim_{x\to 2} f(x) = 5\times 2-2 = 8$. $\boxed{\text{On peut ainsi prolonger } f \text{ par continuité à } \mathbb{R} \text{ en posant } f(2)=8}$

2) x^3-2x^2-x+2 admet pour racines évidentes 1 et -1, donc il se factorise par $(x-1)(x+1) = x^2-1$. D'ailleurs ici c'est assez facile :

$$x^3-2x^2-x+2 = x^3-x-2x^2+2 = x(x^2-1)-2(x^2-1)$$
$$= (x-2)(x^2-1)$$
$$= (x-2)(x+1)(x-1)$$

De ce fait, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$$g(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{1-|x|} = \frac{(x-2)(x+1)(x-1)}{1-x} = -(x-2)(x+1)$$

si bien que $\lim_{x\to 1} g(x) = -(1-2)(1+1) = 2$. De même, on a pour $x\in\mathbb{R}^-\setminus\{-1\}$

$$g(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{1-|x|} = \frac{(x-2)(x+1)(x-1)}{1+x} = (x-2)(x-1)$$

d'où $\lim_{x\to -1} g(x) = (-1-2)(-1-1) = 6$. Par conséquent,

$\boxed{\text{On peut prolonger } g \text{ par continuité à } \mathbb{R} \text{ en posant } g(1)=2 \text{ et } g(-1)=6.}$

EXO 7

- Si $f(a) = f(b)$, alors $\frac{f(a)+2f(b)}{3} = f(a)$ donc on peut prendre $c = a$
- Si $f(a) < f(b)$, alors $3f(a) < f(a) + 2f(b) < 3f(b)$

donc $f(a) < \frac{f(a)+2f(b)}{3} < f(b)$

Comme f est continue sur $[a,b]$, on déduit du TVI qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{f(a)+2f(b)}{3}$

- Si $f(b) < f(a)$, on a $f(b) < \frac{f(a)+2f(b)}{3} < f(a)$

et on conclut de la même manière.

EXO 8

Considérons la fonction $f : x \longmapsto 2x - \sin(x^2 + 2x + \sqrt{3})$ définie sur $\mathbb{R}$

(1) f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée et somme de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}$

(2) Comme $|\sin(x^2+2x+\sqrt{3})| \leq 1$, alors $\sin(x^2+2x+\sqrt{3}) \underset{x\to\infty}{=} o(2x)$ si bien que $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} 2x$. De ce fait,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

d'où $0 \in \left] \lim_{x\to-\infty} f(x) \,;\, \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[$

On déduit alors du TVI appliqué à f sur $\mathbb{R}$ qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$, soit

$$2\alpha = \sin(\alpha^2 + 2\alpha + \sqrt{3})$$

CQFD.

EXO 9

Considérons $g : x \mapsto f(x) - x$ définie sur l'intervalle $[0;1]$

① g est continue en tant que somme de fonctions continues

② $g(0) = f(0) \in [0,1]$ donc $g(0) \geq 0$

$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \in [0,1]$

AINSI $g(1) \leq 0 \leq g(0)$

On déduit alors du TVI qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$

soit $f(\alpha) = \alpha$

EXO 10

1) Définissons $f : x \mapsto \cos(x) - x$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$

① f est continue sur $[0, \pi/2]$ (somme de fonctions usuelles continues)

② f est strictement décroissante car $f'(x) = -\sin(x) - 1 < 0$ sur $[0, \pi/2]$

③ $f(0) = \cos 0 = 1$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\pi/2) - \pi/2 = -\pi/2$ donc $f(\frac{\pi}{2}) < 0 < f(0)$

On déduit alors du Théorème de la Bijection qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, \pi/2]$ tel que $f(\alpha) = 0$ càd $\cos(\alpha) = \alpha$. CQFD

2) Même démarche avec $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur $]\pi/2, 3\pi/2[$

① f est continue (somme de fonct° continues)

② $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$ donc $f \nearrow$ str

③ $\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^+} f = -\infty$ & $\lim\limits_{\frac{3\pi}{2}^-} f = +\infty$ donc $0 \in]\lim\limits_{\frac{\pi}{2}^+} f, \lim\limits_{\frac{3\pi}{2}^-} f[$

Thme Bijection : $\exists! \alpha \in]\pi/2, 3\pi/2[$ tq $f(\alpha) = \alpha$ càd $\tan(\alpha) = \alpha$

EXO 11

Soit f un polynôme de degré impair n et a_n son coefficient dominant

(1) f est une fonction continue car polynomiale

(2) $f(x) \underset{\infty}{\sim} a_n x^n$ $\begin{cases} \text{si } a_n > 0 : \lim\limits_{+\infty} f = +\infty \text{ et } \lim\limits_{-\infty} f = -\infty \\ \text{si } a_n < 0 \quad \lim\limits_{+\infty} f = -\infty \text{ et } \lim\limits_{-\infty} f = +\infty \end{cases}$

On a donc $0 \in \left] \lim\limits_{-\infty} f \,;\, \lim\limits_{+\infty} f \right[$ (1^{er} cas) ou $0 \in \left] \lim\limits_{+\infty} f \,,\, \lim\limits_{-\infty} f \right[$ (2^{nd} cas)

Dans tous les cas, on déduit du TVI qu'il existe un réel α tel que $f(\alpha) = 0$: autrement dit, f admet au moins une racine réelle.

EXO 12

1) $\begin{cases} \bullet\ f \text{ est continue (car polynomiale) sur } [1;+\infty[\\ \bullet\ f(1) = 6 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \text{ (cf. équivalent) donc } 4 \in \left] \lim\limits_{+\infty} f \,;\, f(1) \right[\end{cases}$

On déduit alors du TVI qu'il existe $c \in]1,+\infty[$ tq $f(c) = 4$

2) $\begin{cases} \bullet\ f \text{ est continue sur }]0;5] \text{ (somme de fonctions continues)} \\ \bullet\ f \text{ est str} \nearrow \text{ sur }]0,5] \text{ (somme de fonctions croissantes)} \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty \text{ et } f(5) > 24 > 7 \text{ donc } 7 \in \left] \lim\limits_{0} f \,;\, f(5) \right[\end{cases}$

On déduit alors du théorème de la Bijection qu'il existe un unique $c \in]0,5[$ tq $f(c) = 7$

EXO 13

1) $\begin{cases} \bullet\ f : x \longmapsto 4x^5 - x^2 + x + 1 \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ car polynomiale} \\ \bullet\ f(x) \underset{\infty}{\sim} 4x^5 \text{ donc } \lim\limits_{-\infty} f = -\infty \text{ et } \lim\limits_{+\infty} f = +\infty \text{ soit } 0 \in \left] \lim\limits_{-\infty} f \,;\, \lim\limits_{+\infty} f \right[\end{cases}$

On déduit alors du TVI qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tq $f(c) = 0$

2) • Pour $x>1$, on a $x^3>1$ donc $x^5>x^2>1$ et $f(x)=3x^5+\underbrace{(x^5-x^2)}_{>0}+x+1>5$

• Pour $x<-1$, on a $x^5<-1$ et $-x^2<-1$ donc $f(x)=4x^5-x^2+x+1<1-6=-5$

Ainsi $f(x)\neq 0$ sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, ce qui prouve par contraposée que toutes les racines réelles de f sont comprises dans l'intervalle $[-1;1]$.

EXO 14

Comme f est continue sur l'intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle d'après le TVI. Si $f(I)$ est fini, ses bornes sont nécessairement égales : il est donc réduit à un point, ce qui prouve que <u>f est constante.</u>

EXO 15

1) * Appliquons la définition de la limite avec $M=f(0)+1$

• Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, il existe $A_2>0$ tel que $x>A_2 \Rightarrow f(x)>M$

• Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, il existe $A_1<0$ tel que $x<A_1 \Rightarrow f(x)>M$

* De ce fait, $f(x)>M$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus[A_1,A_2]$. Examinons maintenant ce qui se passe sur $[A_1,A_2]$

- la fonction f est continue sur $[A_1,A_2]$
- $[A_1,A_2]$ est un intervalle fermé borné

Par conséquent, f est bornée et atteint ses bornes sur $[A_1,A_2]$. En particulier, f admet un minimum m sur $[A_1,A_2]$

* Enfin, $0\in[A_1,A_2]$ donc $m\leq f(0)<M$

d'où $f(x)>m$ pour tout $x\notin[A_1,A_2]$,

ce qui montre que m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

AINSI $\boxed{f \text{ admet un minimum sur } \mathbb{R}}$

2) Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, on procède de la même façon avec $M = f(0) - 1$

et l'on trouve un intervalle $[A_1, A_2]$ contenant 0 tel que $f(x) < M$ pour $x \notin [A_1, A_2]$

ce qui permet de prouver que le maximum de f sur $[A_1, A_2]$ est aussi le maximum de f sur $\mathbb{R}$

AINSI $\boxed{f \text{ admet un maximum sur } \mathbb{R}}$

3) On applique la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ donc il existe $A_2 > 0$ tel que $x > A_2 \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1$

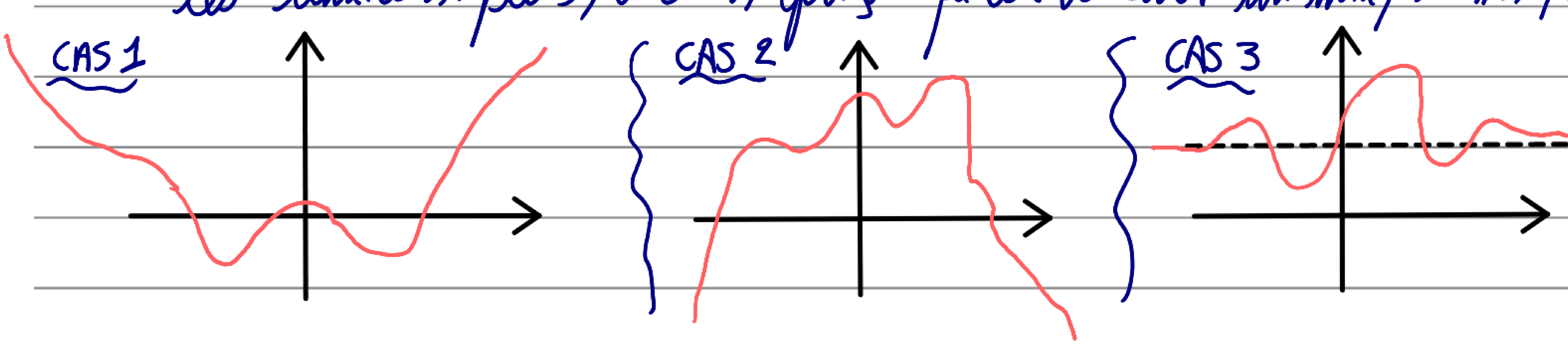
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ donc il existe $A_1 < 0$ tel que $x < A_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| < 1$

Ainsi, pour $x \in]-\infty, A_1[\cup]A_2, +\infty[$, on a $f(x) \in]\ell - 1; \ell + 1[$ donc f est bornée sur ces deux intervalles.

Sur l'intervalle fermé borné $[A_1, A_2]$, la fonction f est continue donc bornée

Il en découle que $\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$

REMARQUE : les démonstrations effectuées dans chacun des cas ne viennent pas de nulle part... ni d'internet ! ... mais "simplement" d'une observation graphique. On tente de tracer la courbe d'une fonction continue ayant les limites imposées, et on s'aperçoit qu'elle va avoir un min / un max / les 2



EXO 16

① CAS GÉNÉRAL : $m < f(a) = f(b) < M$

On va noter x_1 et $x_2 \in [a,b]$ deux réels vérifiant $m = f(x_1)$ et $M = f(x_2)$
Soit $k \in]m, M[$

* Si $k = f(a)$: il admet pour antécédents a et b.

* Si $k \in]m, f(a)[$: on applique le TVI sur $[a, x_1]$ et $[x_1, b]$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est continue sur } [a, x_1] \\ \bullet\ m = f(x_1) < k < f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow$ il existe $c_1 \in]a, x_1[$ tel que $f(c_1) = k$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est continue sur } [x_1, b] \\ \bullet\ m = f(x_1) < k < f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow$ il existe $c_2 \in]x_1, b[$ tel que $f(c_2) = k$

Ainsi k admet (au moins) deux antécédents c_1 et c_2 sur $[a,b]$

* Si $k \in]f(a), M[$: on applique le TVI sur $[a, x_2]$ et $[x_2, b]$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est continue sur } [a, x_2] \\ \bullet\ f(a) < k < f(x_2) = M \end{array}\right\} \Rightarrow$ il existe $c_1 \in]a, x_2[$ tel que $f(c_1) = k$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ est continue sur } [x_2, b] \\ \quad f(b) = f(a) < k < f(x_2) = M \end{array}\right\} \Rightarrow$ il existe $c_2 \in]x_2, b[$ tel que $f(c_2) = k$

AINSI k admet (au moins) deux antécédents c_1 et c_2 sur $[a,b]$

② CAS OÙ $f(a) = f(b) = m$

On note x_2 un réel de $[a,b]$ vérifiant $f(x_2) = M$.
Soit $k \in]m, M[$. On applique le TVI sur $[a, x_2]$ et $[x_2, b]$.

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \text{ est continue sur } [a, x_2] \\ \cdot\ m = f(a) < k < f(x_2) = M \end{array}\right\} \Rightarrow$ il existe $c_1 \in]a, x_2[$ tel que $f(c_1) = k$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \text{ est continue sur } [x_2, b] \\ \cdot\ m = f(b) < k < f(x_2) = M \end{array}\right\} \Rightarrow$ il existe $c_2 \in]x_2, b[$ tel que $f(c_2) = k$

AINSI k admet (au moins) deux antécédents c_1 et c_2 sur $[a, b]$

③ CAS OÙ $f(a) = f(b) = M$

On note x_1 un réel de $[a,b]$ vérifiant $f(x_1) = m$
Soit $k \in]m, M[$. On applique le TVI sur $[a, x_1]$ et $[x_1, b]$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \text{ est continue sur } [a, x_1] \\ \cdot\ m = f(x_1) < k < f(a) = M \end{array}\right\} \Rightarrow$ il existe $c_1 \in]a, x_1[$ tel que $f(c_1) = k$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \text{ est continue sur } [x_1, b] \\ m = f(x_1) < k < f(b) = M \end{array}\right\} \Rightarrow$ il existe $c_2 \in]x_1, b[$ tel que $f(c_2) = k$

AINSI k admet (au moins) deux antécédents sur $[a, b]$

On a bien établi le résultat recherché dans tous les cas de figure.

EXO 17

L'idée est de jouer avec la relation $f(x)=f(2x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

On a aussi $f(x)=f\left(2\times\frac{x}{2}\right)=f(x/2)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

d'où par une récurrence immédiate

$$\boxed{f(x)=f(x/2^n) \text{ pour tout } x\in\mathbb{R} \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N}}$$

Soit alors $x\in\mathbb{R}$ fixé.

On a bien évidemment $x/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $f(x/2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$

par continuité de f en 0.

Or $f(x/2^n)=f(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qui montre que $f(x)=f(0)$.

Ceci étant vrai pour tout $x\in\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$$

EXO 18

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)^2\geqslant 0$ donc

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est nécessairement positive.}}$$

2) Supposons qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f(c)=0$. Alors

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=f(x-c+c)=f(x-c)\times f(c)=0$$

AINSI $\boxed{\text{Si } f \text{ s'annule en un point, c'est la fonction nulle.}}$

PAR CONTRAPOSÉE si f n'est pas la fonction nulle, elle ne s'annule jamais donc elle reste strictement positive d'après la question 1.

3) CAS OÙ $f>0$

- Pour $x=y=0$, on obtient $f(0)=f(0)^2$ soit $\boxed{f(0)=1}$ comme $f(0)>0$.

- Ensuite, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(n+1)=f(1)\times f(n)$ donc $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $f(1)$ et de premier terme $f(0)=1$ si bien que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \quad f(n)=f(1)^n}$$

- AD Comme $f(1)>0$, on peut poser $a=\ln(f(1))\in\mathbb{R}$ de sorte que $f(1)=e^a$ et ainsi $f(n)=e^{an}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Ça commence à prendre forme

- Soit maintenant $n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. Alors $-n\in\mathbb{N}$ et $n+(-n)=0$ si bien que $f(n)\times f(-n)=f(0)=1$ par propriété de f
d'où $f(n)=\dfrac{1}{f(-n)}=\dfrac{1}{e^{-an}}=e^{an}$ grâce à l'expression trouvée sur $\mathbb{N}$

On a ainsi établi que $\boxed{\forall n\in\mathbb{Z} \quad f(n)=e^{an}}$

- Soit $r\in\mathbb{Q}$: il existe $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $r=\dfrac{p}{q}$
En suivant le même raisonnement qu'au début de la question,
$$f((n+1)r)=f(nr+r)=f(nr)\times f(r)$$
donc $(f(nr))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $f(r)$ et de premier terme $f(0)=1$, si bien que $f(nr)=f(r)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

En particulier, $\underset{=f(r)^q}{f(qr)}=f(p)=e^{ap}$ car $p\in\mathbb{Z}$

d'où $f(r)=(e^{ap})^{1/q}=e^{ap/q}=e^{ar}$. De ce fait

$$\boxed{\forall r\in\mathbb{Q} \quad f(r)=e^{ar}}$$

Là, on tombe sur un résultat classique mais délicat :
« tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels »

Le plus simple est de considérer l'arrondi à la $n^{ième}$ décimale.
Voici comment procéder : soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le nombre rationnel $u_n = \dfrac{E(10^n x)}{10^n}$

On se convainc sans peine que c'est l'arrondi de x à la $n^{ième}$ décimale...
mais quoiqu'il en soit, on va prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = x$

Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $E(z) \leq z < E(z)+1$ donc $z-1 < E(z) \leq z$
En particulier, $10^n x - 1 < E(10^n x) \leq 10^n x$
d'où $x - 10^{-n} < u_n \leq x$ en divisant par 10^n
On déduit alors du théorème des Gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$

Par continuité de f sur $\mathbb{R}$, on obtient $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n)$

Or $u_n \in \mathbb{Q}$ donc $f(u_n) = e^{a u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = e^{ax}$ par continuité de l'exponentielle

On a ainsi établi que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{ax}}$ avec $a = \ln f(1)$

4) On déduit des questions précédentes que les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

sont la fonction nulle et toutes les fonctions $f_a : x \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé