

CHAPITRE 23

EXO 1

1) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = 0\}$ est un plan de l'espace passant par l'origine, donc un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

JUSTIFICATION DÉTAILLÉE :

1) $\vec{0} \in E$ car $0 - 2 \times 0 = 0$

2) soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z') \in E$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$

Alors $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$

OR :

$$\lambda x + \mu x' - 2(\lambda y + \mu y') = \underbrace{\lambda(x - 2y)}_{=0 \text{ car } \vec{u} \in E} + \underbrace{\mu(x' - 2y')}_{=0 \text{ car } \vec{v} \in E} = 0$$

donc $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in E$

Ceci montre que E est un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

2) $F = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{R}\}$ est une droite de l'espace passant par l'origine, donc un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

JUSTIFICATION

1) $\vec{0} = (0, 0, 0) \in F$

2) Soient $\vec{u}(x, x, x)$ et $\vec{v}(y, y, y) \in F$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$

Alors $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} (\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) \in F$

Ceci montre que F est un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

3) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / |z| = 1\}$ ne contient pas $\vec{0}(0, 0, 0)$ puisque $|0| \neq 1$ ainsi, G n'est pas un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

4) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xy = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$

Cette union de plans n'est pas stable par addition car $\vec{u}(1, 0, 0)$ et $\vec{v}(0, 1, 0) \in H$ mais $\vec{u} + \vec{v}(1, 1, 0) \notin H$ puisque $1 \times 1 \neq 0$. Ainsi, H n'est pas un $\mathcal{D}$ -es de $\mathbb{R}^3$

5) $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y = z\}$ est un plan passant par l'origine. On montre, comme pour l'exemple, que c'est un s.v. de $\mathbb{R}^3$.

6) $J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ne contient pas $\vec{0}(0, 0, 0)$ puisque $0^2 + 0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$ donc J n'est pas un s.v. de $\mathbb{R}^3$.

EX02

• F : plan de vecteurs directeurs $\vec{u}(-1; 2; -3)$ et $\vec{v}(0; 1; -1)$
 Son vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ vérifie $\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$
 soit $\begin{cases} -a + 2b - 3c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 3c = -c \\ b = c \end{cases}$

Pour $c = 1$, on obtient $\vec{n}(-1; 1; 1)$: F a donc pour équation $\boxed{-x + y + z = 0}$

• F' : plan de vecteurs directeurs $\vec{w}(2; -3; 1)$ et $\vec{z}(7; -9; 8)$
 Son vecteur normal $\vec{n}'(a, b, c)$ vérifie alors $\vec{n}' \cdot \vec{w} = \vec{n}' \cdot \vec{z} = 0$

$$\text{soit } \begin{cases} 2a - 3b + c = 0 \\ 7a - 9b + 8c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b + c = 0 \\ a + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5c \\ b = \frac{2a+c}{3} = -3c \end{cases}$$

Pour $c = -1$, on obtient $\vec{n}'(5; 3; -1)$: F' a pour équation $\boxed{5x + 3y - z = 0}$

REMARQUE: les plans vectoriels ont pour équation $ax + by + cz = 0$
 avec (a, b, c) les coordonnées d'un vecteur normal

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap F' \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 5x + 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z - x + y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x - y = -2y \\ x = -y \end{cases} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

L'intersection de deux plans
 donne une droite... tout va bien!

et ainsi:

$$F \cap F' = \{ (-y, y, -2y) / y \in \mathbb{R} \} = \text{Vect} \{ (-1; 1; -2) \}$$

EX03

On procède de la même façon... je conserve les notations pour détailler le début

$$\bullet \boxed{F} \quad \vec{n}' \text{ vérifie } \begin{cases} 2a+3b-c=0 \\ -a+2b+5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b+5c=0 \\ 7b+9c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=35c/7-18c/7=17c/7 \\ b=-9c/7 \end{cases}$$

Pour $c=7$, on obtient $\vec{n}'(17; -9; 7)$: F a pour équation $\boxed{17x-9y+7z=0}$

$$\bullet \boxed{F'} \quad \vec{n}' \text{ vérifie } \begin{cases} 3x+y-6z=0 \\ 4x+13y+7z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y-6z=0 \\ 35y+45z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z-y/3 \\ y=-45z/35=-9z/7 \end{cases}$$

Pour $z=7$, on obtient $y=-9$ puis $x=17$

Ainsi, F' a pour vecteur normal $\vec{n}'(17; -9; 7)$ et pour équation $\boxed{17x-9y+7z=0}$

On a donc $F=F'$ donc $F \cap F' = F$, plan d'équation $17x-9y+7z=0$

EX04

$$1+i=1+i (!) \text{ donc } \color{red}{1} \times (1+i) - \color{red}{1} \times 1 - \color{red}{1} \times i = 0$$

Cette combinaison linéaire nulle à coefficients non nuls montre que

la famille $\{1; i; 1+i\}$ est liée

EX05

$$1) \quad x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x+y=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0 : \text{famille LIBRE}$$

$$\text{Pour } \vec{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}=\vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ 2x+y=b \\ 3x+2y+z=c \end{cases}$$

Système toujours compatible $\Rightarrow$ famille GÉNÉRATRICE

Ainsi, la famille proposée est une base de $\mathbb{R}^3$

$$2) \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y + 4z = 0 \\ 4x + 6y + 2z = 0 \\ 2x + 6y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 & (L2) \\ 3y = 0 & (L3) - (L2) \\ -3y = 0 & (L1) - 2(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Infinité de relation: la famille est liée

$$\text{Pour } \vec{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y + 4z = a \\ 4x + 6y + 2z = b \\ 2x + 6y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + 2z = a/2 \\ 2x + 3y + z = b/2 \\ 2x + 6y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = b/2 \\ 3y = c - b/2 \\ -3y = a/2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = b/2 \\ 3y = c - b/2 \\ 0 = \frac{a}{2} - \frac{3b}{2} + c = \frac{1}{2}(a - 3b + 2c) \end{cases}$$

donc le système n'est compatible que si $a - 3b + 2c = 0$: la famille n'est pas génératrice

$$3) \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 : \text{famille LIBRE}$$

$$\text{Pour } \vec{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y = b \\ x = c \end{cases}$$

Le système est toujours compatible, donc la famille est GÉNÉRATRICE

Et ainsi, la famille propre est une base de $\mathbb{R}^3$

REM: les familles 1) et 3) sont des familles étagées de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, de ce fait ce sont des bases de $\mathbb{R}^3$

$$4) \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 & (L3) \\ y + 2z = 0 & (L2) \\ 4y + 5z = 0 & (L1) + 2(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ -3z = 0 & (L3) - 4(L2) \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 : \text{famille LIBRE}$$

$$\text{Pour } \vec{V} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3z = a \\ y + 2z = b \\ -x + 2y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = c \\ y + 2z = b \\ 4y + 5z = a + 2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = c \\ y + 2z = b \\ -3z = a - 4b + 2c \end{cases} : \text{Ce système est toujours compatible donc la famille est GÉNÉRATRICE}$$

REM dans les questions 2) et 4), on effectue exactement les mêmes opérations sur les systèmes homogènes et les systèmes non-homogènes car les membres de gauche sont les mêmes.

EX06

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ tels que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$

$$\text{Alors } \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + \dots + \lambda_n (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots + \vec{u}_n) = \vec{0}$$

$$\text{d'où } (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \vec{u}_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n) \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

Comme la famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ est libre, ceci implique que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

La famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ est donc libre.

EX07

Soient λ, μ et $\nu \in K$ tels que $\lambda(x+y) + \mu(y+z) + \nu(z+x) = 0$

Alors

$$(\lambda + \nu)x + (\lambda + \mu)y + (\mu + \nu)z = 0$$

Comme la famille $\{x, y, z\}$ est libre, ceci implique que

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \quad (L2) \\ \mu + \nu = 0 \quad (L3) \\ -\mu + \nu = 0 \quad (L1) - (L2) \end{array} \right. \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ 2\nu = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \end{array} \right.$$

et donc $\lambda = \mu = \nu = 0$: il en découle que $\{x+y, y+z, z+x\}$ est libre

EX08

On a forcément $\vec{w} \in \text{Vect}(\vec{u}', \vec{v}') = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ donc $\vec{w}' \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$
Ainsi, il existe $(x, y) \in K^2$ tel que $\vec{w}' = x\vec{u} + y\vec{v}$ d'où

$$1 \times \vec{w}' - x \times \vec{u} - y \times \vec{v} = \vec{0}'$$

Comme $1 \neq 0$, cette relation montre que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}'\}$ est liée

EX09

En anticipant sur la fin du chapitre, calculons le rang de la famille

$$\text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} = \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \right\} = \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = 2$$

$C_2 \quad C_3 \quad C_1 - C_2 \quad C_4 - C_2$

De ce fait, la famille n'est ni libre, ni génératrice.

Exo 10

1) On donne (dans une base de cristal) que $2\vec{v} - \vec{w} = (3, 7, 9) = \vec{u}$ donc $\vec{u} \in \text{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$

2) La famille est libre si son rang vaut 3

$$\text{Or, } \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y+2 \\ z+2x \end{pmatrix} \right\}$$

$\quad \quad \quad C_1 \quad \quad C_2 - 2C_1 \quad \quad C_3 - xC_1$

$$= \text{rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z+2x - \frac{3}{5}(y+2) \end{pmatrix} \right\}$$

$\quad \quad \quad C_3 - \frac{z+2}{5}C_2$

$$\text{rg} = 3 \Leftrightarrow z+2x - \frac{3}{5}(y+2) \neq 0 \Leftrightarrow 5z+7x-3y \neq 0$$

Ainsi, la famille est libre si $7x-3y+5z \neq 0$

3) Dans ce cas, on a une famille de 3 vecteurs de rang 3 en dimension 3 :
c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$

Exo 11

Les familles sont constituées de deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$
 $\Rightarrow$ elles sont libres

Ce sont des familles libres de 2 vecteurs en dimension 2
 $\Rightarrow$ ce sont des bases de $\mathbb{R}^2$

Exo 12

$$(a) \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathcal{G} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$(b) \begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ 2x+4y+z-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ 3z-4t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+z-t=-2y+t/3 \\ z=4t/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y+t/3 \\ y \\ 4t/3 \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

non colinéaires : famille libre

Ainsi $\mathcal{G} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$$(c) \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 \quad (L3) \\ 2y-3z=0 \quad (L1)-(L3) \\ y-3z=0 \quad (L2)-2(L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ -3z+y=0 \quad (L3) \\ y=0 \quad (L2)-(L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

Ainsi $\mathcal{G} = \{ \vec{0} \}$ a pour base $\emptyset$

EXO 13

On note dans chaque cas $\mathcal{F} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \}$

$$1) \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \quad C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1$$

De ce fait, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ et pour dimension 2

$$2) \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \end{matrix}$$

De ce fait, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ et pour dimension 2

$$3) \text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -18 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_2 - 6C_1 \\ C_2 \leftarrow C_3 \end{matrix}$$

De ce fait, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ a pour base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ et pour dimension 2

EXO 14

$$1) \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} C_1 \leftarrow C_4 \\ C_3 \leftarrow C_2 - C_4 \\ C_4 \leftarrow C_3 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 2C_2 \end{cases}$$

$$2) \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= 2$$

$$\begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{cases}$$

colinéaires

EXO 15

RAPPEL: Une base de $\mathbb{R}^3$ est une famille de 3 vecteurs de rang 3 de $\mathbb{R}^3$

1) $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = 2$ donc $\mathcal{F}$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$ (elle n'est pas génératrice)

$$2) \operatorname{Rg}(\mathcal{F}) = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{cases}$$

$$\operatorname{card}(\mathcal{F}) = 3$$

$$= \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{si } a = 2 \\ 3 & \text{si } a \neq 2 \end{cases}$$

De ce fait, $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si, et seulement si, $a \neq 2$

3) $\operatorname{card}(\mathcal{F}) = 4$ donc $\mathcal{F}$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$ (elle n'est pas libre)

$$4) \operatorname{Rg}(F) = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{cases} C_1 \leftarrow C_2 \\ C_2 \leftarrow C_1 + 2C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3/2 \end{cases}$$

$$\operatorname{card}(F) = 3 = \operatorname{Rg} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2 \end{cases}$$

Puisque $\operatorname{Rg}(F) = \operatorname{card}(F) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, la famille F est bien une base de $\mathbb{R}^3$

EXO 16

MÉTHODE : on étage la famille pour voir si elle est liée et trouve une base étagée de $\operatorname{Vect}(F)$.
Si oui, on complète la famille en une base de $\mathbb{R}^4$ en visant bien!

$$1) \operatorname{Vect}(F) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow F$ est liée, on ne peut pas la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ car toute famille contenant une famille liée est liée. colinéaires

$$2) \operatorname{Vect}(F) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_2 \leftarrow C_3/2 \\ C_3 \leftarrow C_2 - C_3/2 \end{cases}$$

Si on ajoute le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient une famille de 4 vecteurs de rang 4 de $\mathbb{R}^4$, donc une base de $\mathbb{R}^4$

$$3) \operatorname{Vect}(F) = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \end{cases}$$

Il suffit d'ajouter $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$

EXO 17

$$1) \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z+x=0 \\ x-t=0 \end{cases} \quad (L2)-(L1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-z = -z-t \\ x=t \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -z-t \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } F = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / (t, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ est de dimension 2.}$$

$$\bullet G = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{cases} G_2 \leftarrow G_2 - G_1 \\ G_3 \leftarrow G_3 - 5G_1 \end{cases}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ est de dimension 2}$$

colonnaires

$$2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F \text{ et } \begin{cases} 1-2+1=0 \\ 2-2+1-1=0 \end{cases} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$$

Puisque ces deux vecteurs sont dans le s-es F, le s-es engendré l'est aussi.
 Il s'agit bien que $G \subset F$

$$\text{Or } \dim G = \dim F = 2 \quad \text{donc } \boxed{F=G}$$