

CHAPITRE 24

Exercices 1 à 11

EXO 1

1) $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{0}) \neq \vec{0}$: de ce fait, f n'est pas linéaire

2) $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$ mais $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ donc $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

Ainsi, f n'est pas linéaire

3) Pour tous $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}\right) = (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z') \\ &= \lambda(x + y + 2z) + \mu(x' + y' + 2z') \\ &= \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est linéaire

NOYAU : pour $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x + y + 2z = 0$
 $\Leftrightarrow x = -y - 2z$

donc $\vec{u} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\text{Ker}(f) = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

IMAGE $a \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists \vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{u}) = a$ c'est-à-dire $x + y + 2z = a$
 Ce système étant compatible pour tout $a \in \mathbb{R}$, il en résulte que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

4) $f(\vec{0}) = 1$ donc $f(\vec{0}') \neq \vec{0}'$: f n'est pas linéaire

POINT MÉTHODE

Une application linéaire doit vérifier la relation

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

ce qui implique en particulier que $f(\vec{0}') = \vec{0}'$ et $\begin{cases} f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) \end{cases}$

* Pour montrer qu'une application est linéaire, on prouve que la relation est vérifiée pour $\vec{u}, \vec{v}, \lambda$ et μ quelconques

* Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire

$\Rightarrow$ on vérifie que $f(\vec{0}') \neq \vec{0}'$

$\Rightarrow$ on trouve $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $f(\vec{u} + \vec{v}) \neq f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

$\Rightarrow$ on trouve λ et $\vec{u}$ tels que $f(\lambda \vec{u}) \neq \lambda f(\vec{u})$

EX02

1) • Si $b \neq 0$, alors $f(0) \neq 0$ donc f n'est pas linéaire

• Si $b = 0$, alors $f: z \mapsto az$

Pour z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda z_1 + \mu z_2) = a(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda a z_1 + \mu a z_2 = \lambda f(z_1) + \mu f(z_2)$$

donc f est linéaire

2) De même, $f(\lambda z_1 + \mu z_2) = a \operatorname{Re}(\lambda z_1 + \mu z_2) + b \operatorname{Im}(\lambda z_1 + \mu z_2)$

$$= a(\lambda \operatorname{Re}(z_1) + \mu \operatorname{Re}(z_2)) + b(\lambda \operatorname{Im}(z_1) + \mu \operatorname{Im}(z_2))$$

$$= \lambda (a \operatorname{Re}(z_1) + b \operatorname{Im}(z_1)) + \mu (a \operatorname{Re}(z_2) + b \operatorname{Im}(z_2))$$

donc f est linéaire

$$= \lambda f(z_1) + \mu f(z_2)$$

3) Pour u et $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, λ et $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= (\lambda u + \mu v)'' - 3(\lambda u + \mu v)' + 2(\lambda u + \mu v) \\ &= \lambda u'' + \mu v'' - 3(\lambda u' + \mu v') + 2(\lambda u + \mu v) \\ &= \lambda(u'' - 3u' + 2u) + \mu(v'' - 3v' + 2v) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire

REMARQUE c'est pour cela que l'équation $u'' - 3u' + 2u = 0$ est qualifiée d'équation différentielle linéaire

EXO 3

$$1) \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 & (L3) \\ -y + 3z = 0 & (L1) - 2(L3) \\ y + 4z = 0 & (L2) - (L3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \\ 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

si bien que $\boxed{\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}}$ de base $\emptyset$

f est surjective

$$\bullet \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } f(\vec{u}) = \vec{v}$$

$$\text{Or } f(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + y + 3z = b \\ x - z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c \\ -y + 3z = a - 2c \\ y + 4z = b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c \\ -y + 3z = a - 2c \\ 7z = a + b - 3c \end{cases}$$

Le système est compatible pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, cela signifie que tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à $\text{Im}(f)$. Ainsi

f est surjective

$\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$ de base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$2). \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow g(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+t=0 \\ y-z+2t=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 & (L3) \\ y-z+t=0 & (L1)-(L3) \\ y-z+2t=0 & (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y-z+t=0 \\ t=0 & (L3)-(L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \\ t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Ker}(g) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}} \text{ de dimension } 1$$

$$\bullet \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(g) \Leftrightarrow \exists \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, g(\vec{u}) = \vec{v} \dots \text{ce qui signifie que le système a des solutions et est compatible}$$

$$\text{Or } g(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+t=a \\ y-z+2t=b \\ x+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=c \\ y-z+t=a-c \\ y-z+2t=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=c \\ y-z+t=a-c \\ t=b+c-a \end{cases}$$

Le système est compatible pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, ce qui signifie que $\boxed{\text{Im}(g) = \mathbb{R}^3}$

$$3). \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(h) \Leftrightarrow h(\vec{u}) = \vec{0}$$

g est surjective

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-3z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4z=0 & (L1)-(L2) \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4z=0 \\ y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4z \\ y=-5z \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4z \\ -5z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{\text{Ker}(h) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$ est un Ker de dimension 1

PREDICTION : Im(h) est de dimension 2 !

$$\bullet \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Im}(h) \Leftrightarrow \exists \vec{u}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, h(\vec{u}') = \vec{v}$$

$$\text{Or } h(\vec{u}') = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ x + y + z = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = b & (L2) \\ -y - 5z = a - 2b & (L1) - 2(L2) \end{cases}$$

Le système est compatible pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, donc $\vec{v} \in \text{Im}(h) \Leftrightarrow \vec{v} \in \mathbb{R}^2$
 e qui prouve que

de base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\boxed{\text{Im}(h) = \mathbb{R}^2}$$

h est surjective

POINT MÉTHODE

* Pour déterminer $\text{Ker}(f)$, on résout l'équation $f(\vec{u}') = \vec{0}$
 L'ensemble de ses solutions est $\text{Ker}(f)$

* Pour déterminer $\text{Im}(f)$, on étudie la compatibilité du système $f(\vec{u}') = \vec{v}$
 $\text{Im}(f)$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ pour lesquels il est compatible

EXO 4

$$1) \cdot \vec{u}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}') = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\bullet \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists \vec{u}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(\vec{u}') = \vec{v}$$

$$\text{Or } f(\vec{u}') = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = a \\ x - 2y + z = b \\ x - z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c \\ -2y + 2z = b - c \\ -y + z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = c \\ -y + z = a \\ 0 = b - c - 2a \end{cases}$$

Le système n'est compatible que lorsque $0 = b - c - 2a$

Ainsi $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow b - c - 2a = 0$

$\Leftrightarrow b = 2a + c$

$\Leftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a+c \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec a et $c \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{v} \in \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

On en déduit que

$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ENFIN ! ON VOIT COMMENT DÉTERMINER $\text{Im}(f)$ DANS UN CAS OÙ L'APPLICATION f N'EST PAS SURJECTIVE

2). $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow g(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \\ 0=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ce qui montre que

$\text{Ker}(g) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

• $\vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im}(g) \Leftrightarrow \exists \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid g(\vec{u}) = \vec{v}$

OR $g(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ y-z=b \\ x+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ y-z=b \\ -y+z=c-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ y-z=b \\ 0=b+c-a \end{cases}$

Ainsi $\vec{v} \in \text{Im}(g) \Leftrightarrow b+c-a=0 \Leftrightarrow a=b+c \Leftrightarrow \vec{v} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d'où

$\text{Im}(g) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$3) \cdot \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(h) \Leftrightarrow h(\vec{u}) = \vec{0}' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -y = 2x \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Ker}(h) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \vec{v}' \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \text{Im}(h) \Leftrightarrow \exists \vec{u}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } h(\vec{u}') = \vec{v}'$$

$$\text{On } h(\vec{u}') = \vec{v}' \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ y + z = b \end{cases} : \text{le système étant compatible pour}$$

tout $\vec{v}' \in \mathbb{R}^2$, on en déduit que $\vec{v}' \in \text{Im } h \Leftrightarrow \vec{v}' \in \mathbb{R}^2$ soit

$$\boxed{\text{Im}(h) = \mathbb{R}^2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

EX05

1) • La famille $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ cf. famille libre (car étendue) de deux vecteurs en dimension deux.

De ce fait, il existe d'après le cours une unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \vec{v}_1$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \vec{v}_2$ (étant donnés $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$)

• Expression de f

$$\text{Pour } \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \text{ on a } f(\vec{u}) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ par linéarité}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, x+y, y)}$$

- Im f
On voit que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(B))$, avec B base de $\mathbb{R}^2$
Or, $f(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est libre

donc $\text{Im}(f) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de dimension 2

Les auteurs notent que ce plan admet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal
donc $\text{Im}(f)$ a pour équation $x - y + z = 0$

- Ker f
Théorème de rang : $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\text{Im } f) + \text{rg}(f)$
donc $2 = \dim(\text{Ker } f) + 2$
d'où $\dim(\text{Ker } f) = 0$ soit $\text{Ker}(f) = \{ \vec{0} \}$

NB: f est injective mais pas surjective

- 2) On procède exactement de la même manière.
Petite subtilité: la décomposition d'un vecteur dans la base de $\mathbb{R}^2$ proposée requiert quelques calculs

- La famille $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre (2 vecteurs non colinéaires)
de deux vecteurs en dimension deux, donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$
De ce fait, il existe une unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$
telle que $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• Expression de f

Notons $\vec{e}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Pour calculer $f(\vec{u})$, il faut écrire $\vec{u}$ sous la forme $\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ afin d'utiliser $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$

OR

$$\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x_1 + x_2 \\ y = x_1 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y \\ -3x_2 = x - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y + y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \\ x_2 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

Ainsi $\vec{u} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right) \vec{e}_1 + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \vec{e}_2$

d'où $f(\vec{u}) = \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right) f(\vec{e}_1) + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) f(\vec{e}_2)$ par linéarité

$$= \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$

soit

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y \\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
donc tout va bien!

• B étant une base de $\mathbb{R}^2$, on a alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(B))$

soit

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

q. $f(B)$ est une famille libre car étagée

• $f(B)$ est libre donc f est injective d'où $\text{Ker } f = \{\vec{0}\}$

EX06

- Par convention, $f^2 = f \circ f$ donc $f^2 - 4f + \text{Id}_E = 0 \Leftrightarrow 4f - f \circ f = \text{Id}_E$
- $(4\text{Id}_E - f) \circ f = 4\text{Id}_E \circ f - f \circ f = 4f - f^2 = \text{Id}_E$ puisque $\text{Id}_E \circ f = f$
 - Comme f est linéaire, $f \circ 4\text{Id}_E = 4f \circ \text{Id}_E = 4f$
d'où $f \circ (4\text{Id}_E - f) = f \circ (4\text{Id}_E) - f \circ f = 4f - f \circ f = \text{Id}_E$
- De ce fait,
- $$(4\text{Id}_E - f) \circ f = f \circ (4\text{Id}_E - f) = \text{Id}_E$$

ce qui prouve que $f \in \text{GL}(E)$ et $f^{-1} = 4\text{Id}_E - f$

EX07

1) $\Rightarrow$ Supposons que $g \circ f = 0$ BUT: Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$

- Soit $\vec{v}' \in \text{Im}(f)$: alors il existe $\vec{u}' \in E$ tel que $\vec{v}' = f(\vec{u}')$
- De ce fait, $g(\vec{v}') = g(f(\vec{u}')) = g \circ f(\vec{u}') = \vec{0}$ car $g \circ f = 0$
d'où $\vec{v}' \in \text{Ker}(g)$

Ceci étant vrai pour tout vecteur $\vec{v}' \in \text{Im}(f)$, on a bien montré que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$

$\Leftarrow$ Supposons que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ BUT: Montrer que $g \circ f = 0$

- Soit $\vec{u}' \in E$: alors $f(\vec{u}') \in \text{Im}(f)$ par définition de Im
- Or $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ donc $f(\vec{u}') \in \text{Ker}(g)$ soit $g(f(\vec{u}')) = \vec{0}$

AINSI, $g \circ f(\vec{u}') = \vec{0}$: ceci étant vrai pour tout vecteur $\vec{u}' \in E$
on en déduit que $g \circ f = 0$

- 2) • Soit $\vec{w}' \in \text{Im}(g \circ f)$: il existe alors $\vec{u}' \in E$ tel que $\vec{w}' = g \circ f(\vec{u}')$
 • Ainsi, $\vec{w}' = g(f(\vec{u}')) = g(\vec{v})$ en posant $\vec{v} = f(\vec{u}') \in F$
 ce qui montre que $\vec{w}' \in \text{Im}(g)$

Ceci étant vrai pour tout $\vec{w}' \in \text{Im}(g \circ f)$, on en déduit que $\boxed{\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)}$

- 3) • Soit $\vec{u}' \in \text{Ker}(f)$: on a de ce fait $f(\vec{u}') = \vec{0}'$
 • Par linéarité, $g(f(\vec{u}')) = g(\vec{0}') = \vec{0}$ donc $g \circ f(\vec{u}') = \vec{0}$
 Ainsi, $\vec{u}' \in \text{Ker}(g \circ f)$

Ceci étant vrai pour tout $\vec{u}' \in \text{Ker}(f)$, on en déduit que $\boxed{\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)}$

- 4) COMPLEMENT si A est un ensemble et f une application,
 $f^{-1}(A)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de A par f

Autrement dit

$$\boxed{x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A}$$

Pour $\vec{u}' \in E$, on a $\vec{u}' \in f^{-1}(\text{Ker}(g)) \Leftrightarrow f(\vec{u}') \in \text{Ker}(g)$

$$\Leftrightarrow g(f(\vec{u}')) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow g \circ f(\vec{u}') = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u}' \in \text{Ker}(g \circ f)$$

ce qui montre que $\boxed{\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker}(g))}$

Les questions 1), 2) et 3) de cet exercice sont à maîtriser impérativement, ce sont des grands classiques !

EX08

$\Rightarrow$ On suppose que $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ BUT prouve que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$

Soit $\vec{u}' \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f)$

- $\vec{u}' \in \text{Im}(f)$ donc il existe $\vec{v}' \in E$ tel que $\vec{u}' = f(\vec{v}')$
- $\vec{u}' \in \text{Ker}(f)$ donc $f(\vec{u}') = \vec{0}'$

D'où fait, $f(\vec{u}') = f(f(\vec{v}')) = f^2(\vec{v}') = \vec{0}'$ si bien que $\vec{v}' \in \text{Ker}(f^2)$

Or $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ donc $\vec{v}' \in \text{Ker}(f)$ d'où $f(\vec{v}') = \vec{0}'$ soit $\vec{u}' = \vec{0}'$

Ainsi, $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}'\}$

$\Leftarrow$ On suppose que $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}'\}$ BUT montre que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$

- Soit $\vec{u}' \in \text{Ker}(f)$: alors $f(\vec{u}') = \vec{0}'$ d'où $f^2(\vec{u}') = f(\vec{0}') = \vec{0}'$ car $f \in \mathcal{L}(E)$
Ceci prouve que l'on a $\vec{u}' \in \text{Ker}(f^2)$

Ainsi, $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$

- Soit $\vec{u}' \in \text{Ker}(f^2)$: alors $f^2(\vec{u}') = \vec{0}' = f(f(\vec{u}'))$ donc $f(\vec{u}') \in \text{Ker}(f)$
Par ailleurs, $f(\vec{u}') \in \text{Im}(f)$ évidemment
donc $f(\vec{u}') \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}'\}$ d'où $f(\vec{u}') = \vec{0}'$
Ceci montre que $\vec{u}' \in \text{Ker}(f)$

Ainsi $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$

On a bien prouvé que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$

Encore un exercice essentiel, qui permet de réviser les techniques de démonstration.

EXO 9

1) $\Rightarrow$ On suppose que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ BUT $\text{mg } f^2 = 0$ et $n = 2 \text{rg}(f)$

- Soit $\vec{u} \in E$: alors $f(\vec{u}) \in \text{Im}(f)$.
Comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, alors $f(\vec{u}) \in \text{Ker}(f)$
d'où $f(f(\vec{u})) = f^2(\vec{u}) = \vec{0}$

Ceci étant vrai pour tout $\vec{u} \in E$, on a bien $\underline{f^2 = 0}$

- Théorème du rang : $\dim(E) = n = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$
 $= 2 \dim(\text{Im}(f))$ car $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$
d'où $\underline{n = 2 \text{rg}(f)}$

$\Leftarrow$ On suppose que $f^2 = 0$ et $n = 2 \text{rg}(f)$ BUT $\text{mg } \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$

Pour cela, on va prouver que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$
et que $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f))$

- Soit $\vec{u}' \in \text{Im}(f)$: il existe $\vec{v}' \in E$ tel que $\vec{u}' = f(\vec{v}')$
De fait, $f(\vec{u}') = f(f(\vec{v}')) = f^2(\vec{v}') = \vec{0}$ car $f^2 = 0$
donc $\underline{\vec{u}' \in \text{Ker}(f)}$

Ceci étant vrai pour tout $\vec{u}' \in \text{Im}(f)$, on en déduit que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$

- De plus, on déduit du théorème du rang que $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$
soit $n = 2 \text{rg}(f) = \dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f)$
d'où $\dim(\text{Ker } f) = \text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f)$

- Comme $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$, il en découle que $\underline{\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)}$

2) On a $f^3 = f \circ f^2 = 0$

• On montre comme à l'exercice 7,1) que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$
Soit en effet $\bar{v}' \in \text{Im}(f^2)$: il existe $\bar{u}' \in E$ tq $\bar{v}' = f^2(\bar{u}')$

De ce fait, $f(\bar{v}') = f(f^2(\bar{u}')) = f^3(\bar{u}') = \bar{0}$ car $f^3 = 0$

donc $\bar{v}' \in \text{Ker}(f)$. Ceci étant vrai pour tout $\bar{v}' \in \text{Im}(f^2)$,
il en découle que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$

• On en déduit que $\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Im } f^2)$
 $\leq \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker } f)$

puisque $\dim(\text{Im } f^2) \leq \dim(\text{Ker } f)$

• Or, $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker } f) = \dim E = n$ d'après le théorème du rang
Ainsi,

$$\boxed{\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq n}$$

EXO 10

Considérons un vecteur $\bar{x}_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(\bar{x}_0) \neq \bar{0}$... il en existe au moins un puisque $f^{n-1} \neq 0$. Montrons alors que la famille

$$F = \{ \bar{x}_0, f(\bar{x}_0), \dots, f^{n-1}(\bar{x}_0) \}$$

est libre. Pour cela, soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in K$ tels que

$$\lambda_0 \bar{x}_0 + \lambda_1 f(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\bar{x}_0) = \bar{0} \quad (1)$$

* Appliquons f^{n-1} à la relation (1) : par linéarité de f^{n-1} , on obtient

$$\underbrace{\lambda_0 f^{n-1}(\bar{x}_0)}_{\neq \bar{0}} + \underbrace{\lambda_1 f^n(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n+n-1}(\bar{x}_0)}_{= \bar{0} \text{ car } f^n = 0} = \bar{0}$$

d'où $\lambda_0 = 0$. Ainsi (1) devient

$$\lambda_1 f(\bar{x}_0) + \lambda_2 f^2(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(\bar{x}_0) = \bar{0}' \quad (2)$$

* Appliquons f^{n-2} à la relation (2) : par linéarité de $f^{(n-2)}$ on obtient

$$\lambda_1 \underbrace{f^{n-1}(\bar{x}_0)}_{\neq \bar{0}'} + \lambda_2 \underbrace{f^n(\bar{x}_0)}_{= \bar{0}' \text{ car } f^n = 0} + \dots + \lambda_{n-1} f^{2n-3}(\bar{x}_0) = \bar{0}'$$

d'où $\lambda_1 = 0$. En répétant le procédé, on prouve ainsi que $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ donc la famille $\mathcal{F}$ est libre

* Enfin, $\mathcal{F}$ est une famille libre de E et card $\mathcal{F} = n = \dim E$.
On prouve que

$\mathcal{F}$ est une base de E

PETITES PRÉCISIONS SUPPLÉMENTAIRES

- (1) $f \in \mathcal{L}(E)$ donc, par composition, $f^k \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
- (2) $f^m = 0$ donc pour tout $p \geq m$, on a $p-m \geq 0$ d'où $f^{p-m} \in \mathcal{L}(E)$
et $f^p = f^m \circ f^{p-m} = 0$

EXO 11

On suppose que $\mathcal{B} = \{f(\bar{x}_0), \dots, f^n(\bar{x}_0)\}$ est une base de E
Soit alors $\bar{u}' \in E$: il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\bar{u}' = \lambda_1 f(\bar{x}_0) + \lambda_2 f^2(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_n f^n(\bar{x}_0)$$

$$= f(\lambda_1 \bar{x}_0 + \lambda_2 f(\bar{x}_0) + \dots + \lambda_n f^{n-1}(\bar{x}_0)) \text{ par linéarité de } f$$

d'où $\bar{u}' \in \text{Im}(f)$. Ceci étant vrai pour tout $\bar{u}' \in E$, alors $\text{Im}(f) = E$

AINSI f est surjective, et comme $f \in \mathcal{L}(E)$, c'est un AUTOMORPHISME