Exercice 1

Il suffit ici d'utiliser la définition de $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ ainsi que les propriétés de l'union et de l'intersection (distributivité et passage au complémentaire). C'est simple et élégant !

1) $(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \overline{C} = \left(A \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{C}\right) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

2) $(A \cap B) \setminus C = A \cap B \cap \overline{C} = A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{C} = \left(A \cap \overline{C}\right) \cap \left(B \cap \overline{C}\right) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

   $(A \cap B) \setminus C = A \cap B \cap \overline{C} = \left(A \cap \overline{C}\right) \cap B = (A \setminus C) \cap B$

   $(A \cap B) \setminus C = A \cap B \cap \overline{C} = \left(B \cap \overline{C}\right) \cap A = (B \setminus C) \cap A$.

3) $(A \setminus B) \setminus C = A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = A \cap \overline{B \cup C} = A \setminus (B \cup C)$.

Exercice 2

1) - <u>*Si* $A = E$</u>
     L'application f est l'identité de $\mathscr{P}(E)$ donc elle est à la fois injective et surjective.
   - <u>*Si* $A \neq E$</u>
     On a $f(E) = A = f(A)$ donc f n'est pas injective.
     De plus, $f(X) = X \cap A \subset A$ pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, ce qui montre que E (par exemple) n'a pas d'antécédent. De ce fait, f n'est pas surjective.

2) - Pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a $f(X) \subset A$ donc $f(X) \in \mathscr{P}(A)$.
     Ainsi, $f(\mathscr{P}(E)) \subset \mathscr{P}(A)$.
   - Pour tout $Y \in \mathscr{P}(A)$, alors $Y \subset A$ donc $Y \cap A = A$ soit $Y = f(Y)$ et $Y \in f(\mathscr{P}(E))$.
     Ainsi, $\mathscr{P}(A) \subset f(\mathscr{P}(E))$.
   - Ceci montre que $f(\mathscr{P}(E)) = \mathscr{P}(A)$.

   Soit maintenant $Y \in \mathscr{P}(E)$. On recherche les antécédents de Y par f, c'est-à-dire que l'on étudie l'équation $Y = f(X) = X \cap A$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

   - Si $Y \not\subset A$, cette équation n'a pas de solution donc $f^{-1}(Y) = \emptyset$.
   - Si $Y \in \mathscr{P}(A)$, alors $X \cap A = Y$ signifie que $Y \subset X$ et que $X \setminus Y \subset \overline{A}$, donc que $X = Y \cup Z$ avec $Z \in \overline{A}$. Ainsi $f^{-1}(Y) = Y \cup \mathscr{P}\left(\overline{B}\right)$.

Exercice 3

1) • <u>*Si f est injective*</u>

   On a $f(A \cup B) = (A \cap (A \cup B), B \cap (A \cup B)) = (A, B) = f(E)$.
   De ce fait, $A \cup B = E$.

   • <u>*Si* $A \cup B = E$</u>

   Soit alors X et $Y \in \mathscr{P}(E)$ tels que $f(X) = f(Y)$: on en déduit que

   $$X \cap A = Y \cap A \qquad \text{et} \qquad X \cap B = Y \cap B$$

   d'où $$(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$$

   soit $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$ et donc $X = Y$. Ainsi f est injective.

2) • <u>*Si f est surjective*</u>

   Il existe alors $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = (A, \emptyset)$.
   Ainsi $X \cap A = A$ et $X \cap B = \emptyset$, d'où $A \subset X \subset \overline{B}$ et donc $A \cap B = \emptyset$.

   • <u>*Si* $A \cap B = \emptyset$</u>

   Soit alors $(A', B') \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$: on a

   $$(A' \cup B') \cap A = (A \cap A') \cup (A \cap B') = A'$$

   et $$(A' \cup B') \cap B = (A' \cap B) \cup (B' \cap B) = B'$$

   car $$A \cap B' \subset A \cap B = \emptyset \qquad \text{et} \qquad A' \cap B \subset A \cap B = \emptyset$$

   De ce fait, $f(A' \cup B') = (A', B')$ et (A', B') admet un antécédent par f.
   Ainsi f est surjective.

3) D'après ce qui précède, f est bijective lorsque $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.
   Dans ce cas, on a d'après la question ci-dessus $f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ (X, Y) & \longmapsto & X \cup Y \end{array} \right.$