Exercice 1

Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan.

1) Notons (H_A), (H_B) et (H_C) les hauteurs issues de A, B et C respectivement.

   - Notons que les points B et C ont la même ordonnée, si bien que la droite (BC) est horizontale. De ce fait, (H_A) est la droite verticale passant par A, si bien que

     $$\boxed{\text{La hauteur } (\mathrm{H_A}) \text{ a pour équation } x = 4.}$$

   - On a $M \in (H_B) \iff \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AC}$.

     Comme $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-10 \\ y-8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \end{pmatrix}$, alors

     $$\begin{aligned} M \in (H_B) &\iff -12(x-10) + 12(y-8) = 0 \\ &\iff -x + 10 + y - 8 = 0 \\ &\iff -x + y + 2 = 0 \end{aligned}$$

     Ainsi $$\boxed{\text{La hauteur } (\mathrm{H_B}) \text{ a pour équation } y = x - 2.}$$

   - On a $M \in (H_C) \iff \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$.

     Comme $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x+8 \\ y-8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$, alors

     $$\begin{aligned} M \in (H_C) &\iff 6(x+8) + 12(y-8) = 0 \\ &\iff x + 8 + 2y - 16 = 0 \\ &\iff x + 2y - 8 = 0 \end{aligned}$$

     Ainsi $$\boxed{\text{La hauteur } (\mathrm{H_C}) \text{ a pour équation } x + 2y = 8.}$$

2) Notons A′, B′ et C′ les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB]. Alors

   $$A'\left(\frac{10-8}{2} = 1; \frac{8+8}{2} = 8\right) \quad B'\left(\frac{4-8}{2} = -2; \frac{-4+8}{2} = 2\right) \quad C'\left(\frac{4+10}{2} = 7; \frac{-4+8}{2} = 2\right)$$

   - On a $M \in (AA') \iff \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AA'}\right) = 0$.

     Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y+4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix}$, alors

     $$\begin{aligned} M \in (AA') &\iff \begin{vmatrix} x-4 & -3 \\ y+4 & 12 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 12(x-4) + 3(y+4) = 0 \\ &\iff 4x - 16 + y + 4 = 0 \\ &\iff 4x + y - 12 = 0 \end{aligned}$$

     Ainsi $$\boxed{\text{La médiane } (\mathrm{AA'}) \text{ a pour équation } y = -4x + 12.}$$

- On a $\mathrm{M} \in (\mathrm{BB}') \iff \det\left(\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{BB}'}\right) = 0$.

  Comme $\overrightarrow{\mathrm{BM}}\begin{pmatrix} x-10 \\ y-8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in (\mathrm{BB}') &\iff \begin{vmatrix} x-10 & -12 \\ y-8 & -6 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff -6(x-10) + 12(y-8) = 0 \\
&\iff -x + 10 + 2y - 16 = 0 \\
&\iff 2y = x + 6
\end{aligned}$$

  Ainsi $\boxed{\text{La médiane (BB}') \text{ a pour équation } y = \frac{x}{2} + 3.}$

- On a $\mathrm{M} \in (\mathrm{CC}') \iff \det\left(\overrightarrow{\mathrm{CM}}, \overrightarrow{\mathrm{CC}'}\right) = 0$.

  Comme $\overrightarrow{\mathrm{CM}}\begin{pmatrix} x+8 \\ y-8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CC}'}\begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in (\mathrm{CC}') &\iff \begin{vmatrix} x+8 & 15 \\ y-8 & -6 \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff -6(x+8) - 15(y-8) = 0 \\
&\iff 2(x+8) + 5(y-8) = 0 \\
&\iff 2x + 5y - 24 = 0
\end{aligned}$$

  Ainsi $\boxed{\text{La médiane (CC}') \text{ a pour équation } 2x + 5y = 24.}$

3) Notons Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les médiatrices des segments [AB], [AC] et [BC].

- On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \Delta_1 &\iff \mathrm{AM} = \mathrm{BM} \\
&\iff (x-4)^2 + (y+4)^2 = (x-10)^2 + (y-8)^2 \\
&\iff (y+4)^2 - (y-8)^2 = (x-10)^2 - (x-4)^2 \\
&\iff (2y-4) \times 12 = (2x-14) \times (-6) = (7-x) \times 12 \\
&\iff 2y - 4 = 7 - x \\
&\iff x + 2y = 11
\end{aligned}$$

  Ainsi $\boxed{\text{La médiatrice } \Delta_1 \text{ a pour équation } x + 2y = 11.}$

- On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in \Delta_2 &\iff \mathrm{AM} = \mathrm{CM} \\
&\iff (x-4)^2 + (y+4)^2 = (x+8)^2 + (y-8)^2 \\
&\iff (y+4)^2 - (y-8)^2 = (x+8)^2 - (x-4)^2 \\
&\iff (2y-4) \times 12 = (2x+4) \times 12 \\
&\iff y - 2 = x + 2 \\
&\iff y = x + 4
\end{aligned}$$

  Ainsi $\boxed{\text{La médiatrice } \Delta_2 \text{ a pour équation } y = x + 4.}$

- Comme la droite (BC) est horizontale, alors Δ_3 est la verticale passant par $A'(1;8)$.

  De ce fait $\boxed{\text{La médiatrice } \Delta_3 \text{ a pour équation } x = 1.}$

4) - Soit $H(x;y)$ l'intersection des hauteurs (H_A) et (H_B) : ses coordonnées vérifient alors

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = x - 2 = 4 \end{cases}$$

   Vérification : $4 + 2 \times 2 = 8$ donc H appartient bien à (H_C).

   Ainsi $\boxed{\text{L'orthocentre du triangle ABC est } H(4;2).}$

   - Soit $G(x;y)$ l'intersection des médianes (AA') et (BB') : ses coordonnées vérifient

$$\begin{cases} y = -4x + 12 \\ y = \dfrac{x}{2} + 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -4x + 12 \\ -4x + 12 = \dfrac{x}{2} + 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -4x + 12 \\ -\dfrac{9x}{2} = -9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \times 2 + 12 = 4 \end{cases}$$

   Vérification : $2 \times 2 + 5 \times 4 = 24$ donc G appartient bien à (CC').

   Ainsi $\boxed{\text{Le centre du gravité du triangle ABC est } G(2;4).}$

   - Soit $O(x;y)$ l'intersection des médiatrices Δ_2 et Δ_3 : ses coordonnées vérifient

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x + 4 = 5 \end{cases}$$

   Vérification : $1 + 2 \times 5 = 11$ donc O appartient bien à Δ_1.

   Ainsi $\boxed{\text{Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est } O(1;5).}$

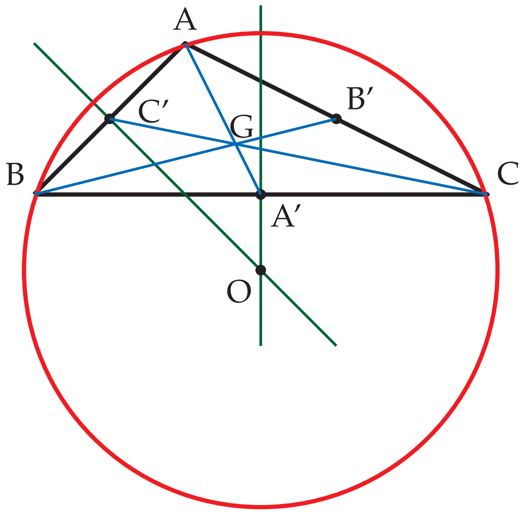
5) On a $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OH}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$, ce qui montre que

$$\boxed{\text{Les points O, H et G sont alignés.}}$$

   On peut même préciser que G se situe sur le segment [OH], au tiers de sa longueur en partant de O. C'est beau !

Exercice 2

1) Évitez de dessiner un triangle rectangle ou équilatéral... par pitié !



2) D'après la relation de Chasles, nous avons

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Or, $A' = m[BC]$ donc $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$. De ce fait,

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{OA'}$$

si bien que $\boxed{\overrightarrow{AK} = 2\,\overrightarrow{OA'}}$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires donc $(AK) \parallel (OA')$.

Comme O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, alors la droite (OA′) est la médiatrice de [BC]. Ainsi $(OA') \perp (BC)$

Enfin $(AK) \parallel (OA')$ d'où $\boxed{(AK) \perp (BC).}$

3) On montre de la même manière que $(BK) \perp (AC)$ et $(CK) \perp (AB)$.
Le point K est donc l'intersection des hauteurs du triangle ABC.

Autrement dit $\boxed{\text{K est l'orthocentre du triangle ABC.}}$

4) Par définition du point K, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}\\ &= 3\,\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\\ &= 3\,\overrightarrow{OG}\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{OK} = 3\overrightarrow{OG}}$

Ceci montre que les points O, G et K sont alignés et nous donne leur position relative.
On retrouve dans un cadre plus général le résultat de l'exercice précédent.