TD n°7 : Algèbre linéaire

Exercice 1

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. On définit l'application f sur E par

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathrm{E} \qquad f(x,y,z) = (2x+y+z,\, x+2y+z,\, x+y+2z)$$

On note $\mathscr{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canonique de E.

1) Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.
2) Donner sa matrice dans la base $\mathscr{B}$.
3) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. Que peut-on dire de f ?
4) Donner une base des espaces vectoriels $\mathrm{F} = \mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_\mathrm{E})$.
5) On note $\mathscr{B}' = \{(1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)\}$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
   (b) Déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 2

Soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à cette matrice.

1) Déterminer le rang de la matrice A. Que dire alors de f ?
2) Soient $\mathbf{e}_1(1,-2,1)$, $\mathbf{e}_2(-1,1,0)$ et $\mathbf{e}_3(0,-2,1)$. On note $\mathscr{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.
   (a) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer $f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$ et $f(\mathbf{e}_3)$, puis déterminer leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
   Indication : $f(\boldsymbol{e}_3)$ s'exprime en fonction de $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$.
   (c) Donner alors la matrice T de f dans la base $\mathscr{B}$.
3) À l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4) Soit P la matrice de passage de la base canonique dans la base $\mathscr{B}$.
   (a) Déterminer P puis calculer P^{-1}.
   (b) Exprimer A en fonction de P et T.
   (c) En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.